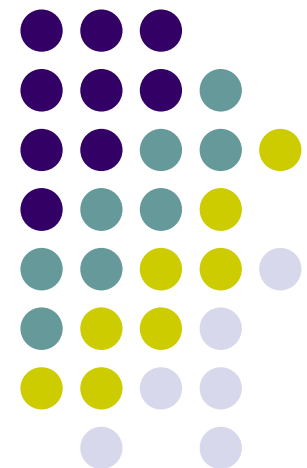


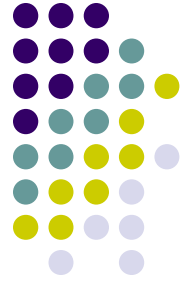
BAB 7

RANGKAIAN GANDENG MAGNETIK



Oleh :
Ir. A.Rachman Hasibuan dan
Naemah Mubarakah, ST



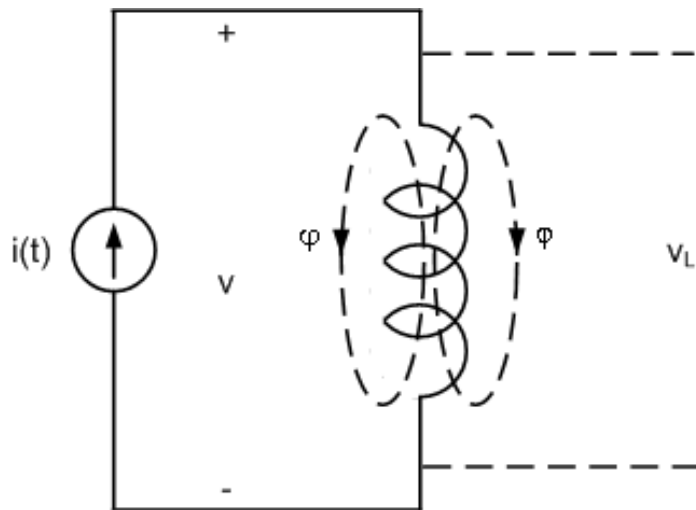


7.1 Pendahuluan

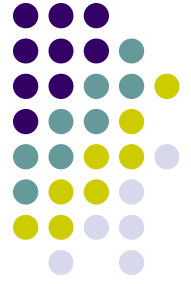
Rangkaian gandeng magnetik (*magnetically couple*) :

Dua buah rangkaian atau lebih yang terhubung secara langsung atau tidak satu sama lainnya, akan tetapi mempunyai pengaruh antara satu sama lainnya secara magnetik, diakibatkan adanya medan magnet disalah satu rangkaian tersebut.

7.2 Induktansi Timbal Balik (*Mutual Indutance*)



Gambar 7.1 Fluksi magnetik yang dibangkitkan pada kumparan dengan N belitan.



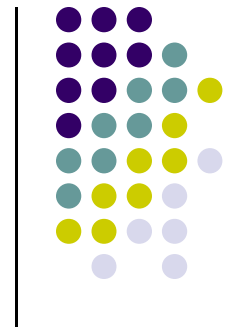
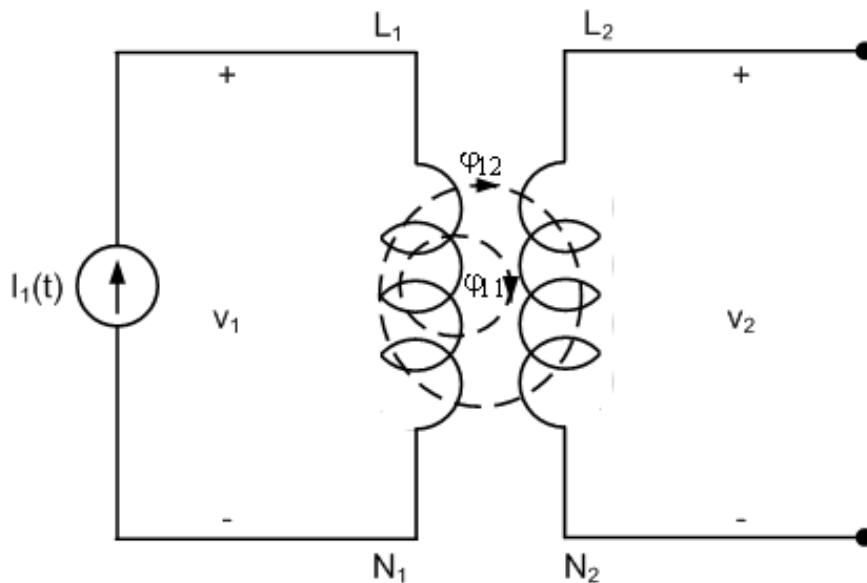
Gambar di atas memperlihatkan sebuah kumparan dengan banyak belitan N . Pada kumparan akan terjadi tegangan induksi sebesar v yang sebanding dengan perkalian jumlah belitan N dengan perubahan fluksi ϕ perwaktu, atau dapat dinyatakan dengan :

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \quad \longrightarrow \quad v = N \frac{d\phi}{di} \cdot \frac{di}{dt}$$

Sebagaimana diketahui bilamana sebuah induktor dialiri arus, maka akan terjadi tegangan pada induktor tersebut sebesar :

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad \xrightarrow{v = v_L} \quad L = N \frac{d\phi}{di}$$

dimana L adalah induktansi diri (*self-indutance*).



Gambar 7.2 Induktansi timbal balik dari Kumparan N_2 terhadap kumparan N_1

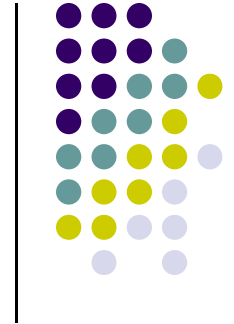
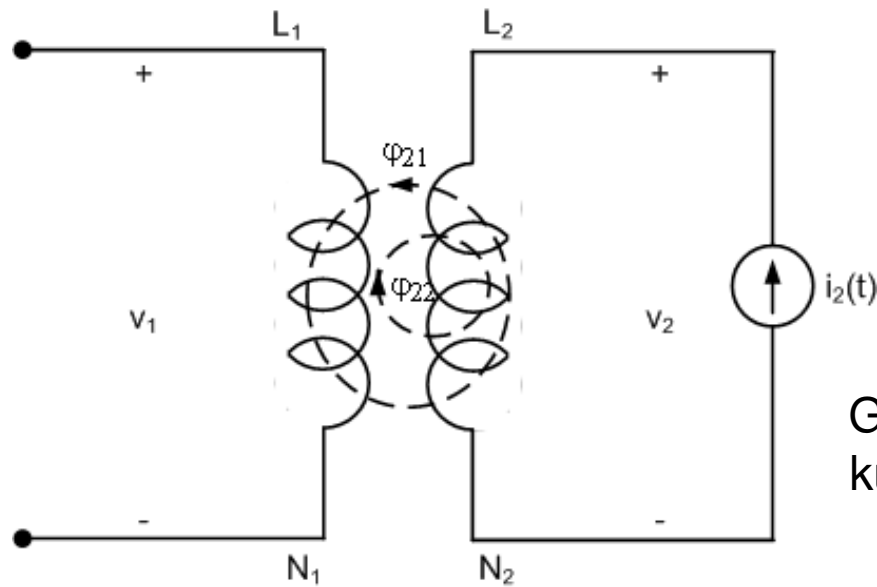
$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \cdot \frac{di_1}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$v_2 = M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \longrightarrow \quad M_{12} = N_2 \frac{d\Phi_{12}}{di_1}$$

M_{21} ini disebut sebagai induktansi timbal balik dari kumparan N_2 akibatnya

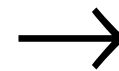
Φ_{12} dari kumparan N_1



Gambar 7.3 Induktansi timbal balik M_{12} pada kumparan N_1 yang diakibatkan kumparan N_2

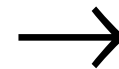
$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} \cdot \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$



$$L_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt}$$

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} \cdot \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

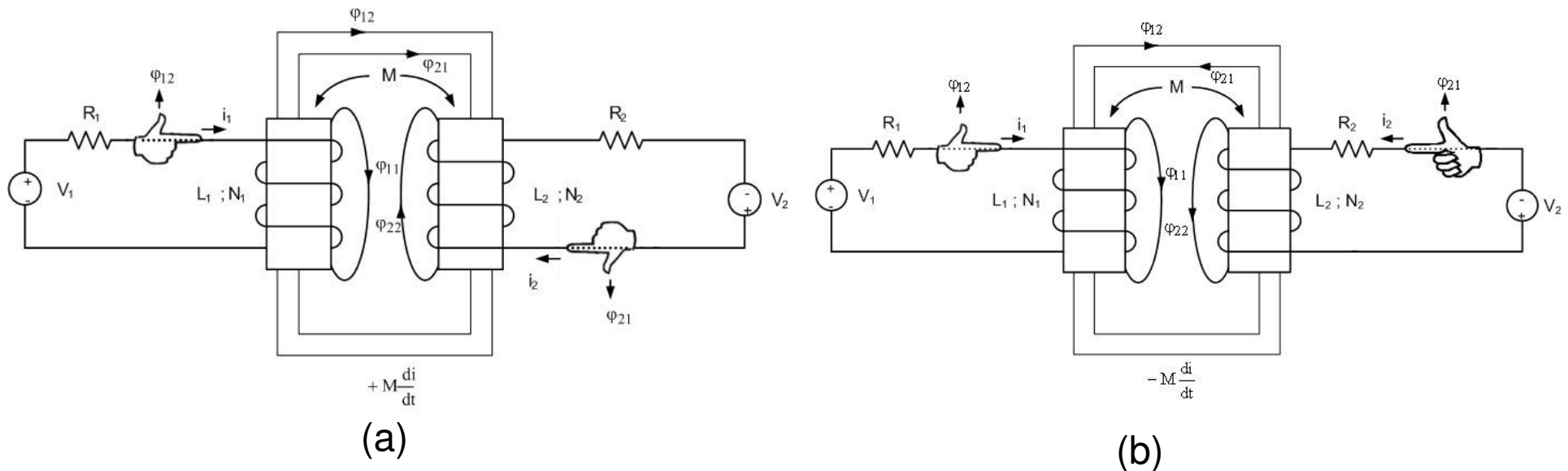


$$M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt}$$

M_{12} disebut sebagai induktansi timbal balik (*mutual-indutance*) dari kumparan N_1 akibat adanya fluksi ϕ_{21} dari kumparan N_2 .

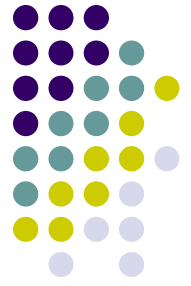
Induktansi timbal balik M yang satuannya dalam henry [H] adalah ukuran kemampuan suatu induktor untuk menginduksikan tegangan pada induktor lain yang berdekatan dengannya.

Apabila konduktor diletakkan pada telapak tangan, dan ibu jari tangan menggenggam kumparan searah dengan arah belitan kumparan maka jari telunjuk menunjukkan arah arus, sedangkan ibu jari menunjukkan arah fluksi.

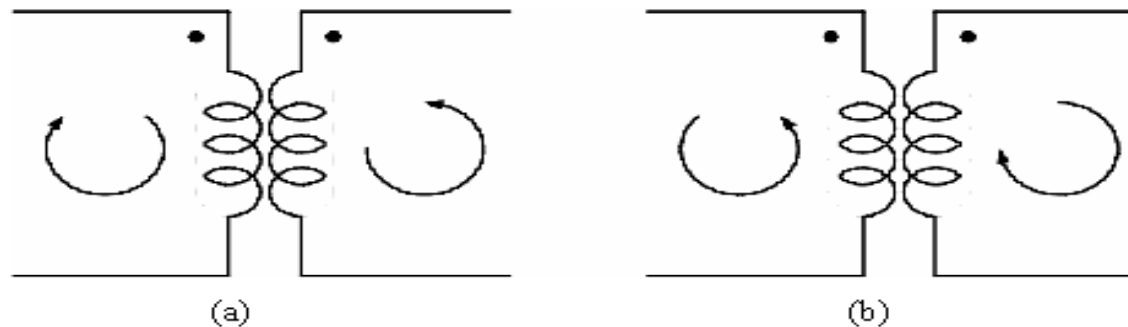


Gambar 7.4 Aturan tangan kanan (a) untuk tanda M positif (b) untuk tanda M negatif

7.3 Aturan Dot

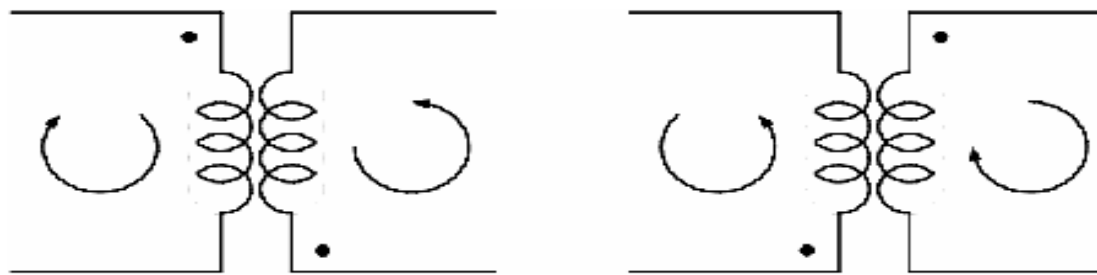


1. *Bilamana kedua arus dalam rangkaian gandeng magnetik sama-sama menuju tanda dot atau sama-sama meninggalkan tanda dot, maka tanda aljabar dari $M \frac{di}{dt}$ adalah positif.*



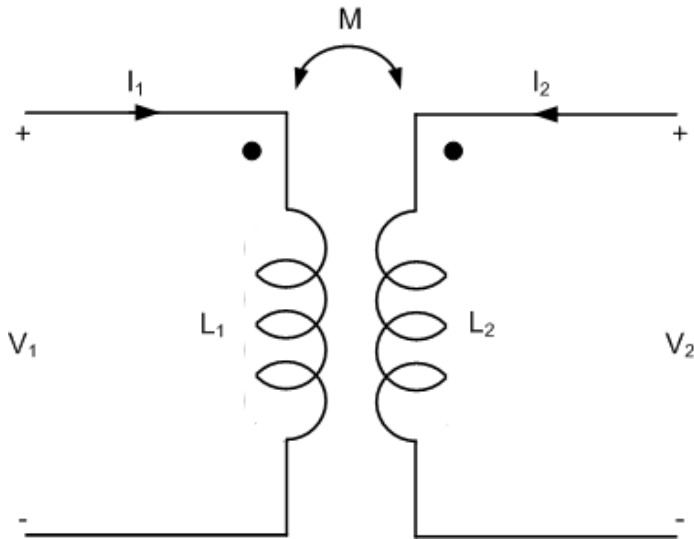
Gambar 7.5 Aturan dot untuk arus sama-sama menuju atau meninggalkan tanda dot
(a) Sama-sama menuju tanda dot (b) Sama-sama meninggalkan tanda dot

2. *Apabila salah satu arus menuju tanda dot, sedangkan yang lain meninggalkan tanda dot, maka tanda aljabar dari $M \frac{di}{dt}$ adalah negatif.*



Gambar 7.6 Arus menuju tanda dot dan yang lain meninggalkan tanda dot

7.4 Energi Pada Rangkaian Gandeng Magnetik



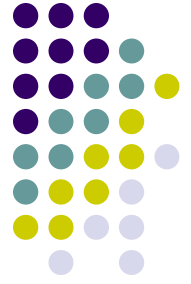
Gambar 7.8 Rangkaian untuk memperlihatkan energi Yang tersimpan dalam rangkaian gandeng

Arus i_1 terlebih dahulu dinaikkan dari nol sampai I_1 dan kemudian barulah i_2 dinaikkan dari nol sampai I_2 . Maka Energi yang tersimpan dalam rangkaian :

$$w_1 = \int p_1 \cdot dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

$$w_2 = \int p_2 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$



Jika arus i_2 terlebih dahulu dinaikkan dari nol sampai I_2 dan kemudian barulah i_1 dinaikkan dari nol sampai I_1 . Maka Energi yang tersimpan dalam rangkaian :

$$w = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + M_{21}I_1I_2$$

bilamana kedua persamaan ini disamakan, akan diperoleh :

$$M_{12} = M_{21} = M$$

maka secara umum dapat dituliskan :

$$w = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \pm \underbrace{M.i_1i_2}_{(*)}$$

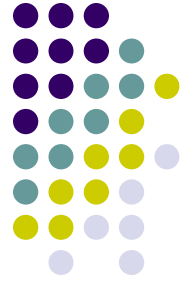
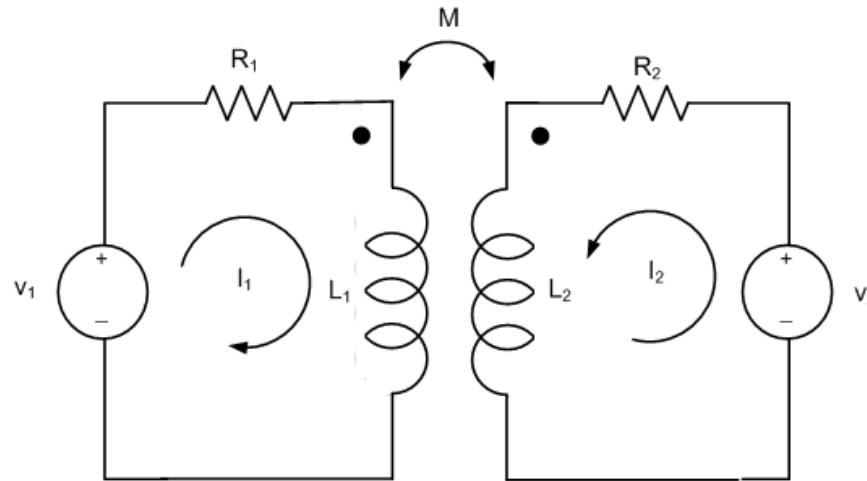
dimana (*) ditentukan oleh aturan dot.

$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad \longrightarrow \quad 0 \leq k \leq 1$$

k disebut sebagai koefisien gandeng (coefficient of coupling k) dari kumparan

Contoh :

Suatu rangkaian gandeng magnetik seperti di bawah ini :



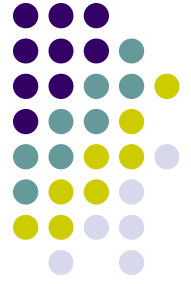
Carilah bentuk persamaan tegangan pada rangkaian gandeng di atas dalam wawasan waktu dan wawasan frekuensi.

Jawab :

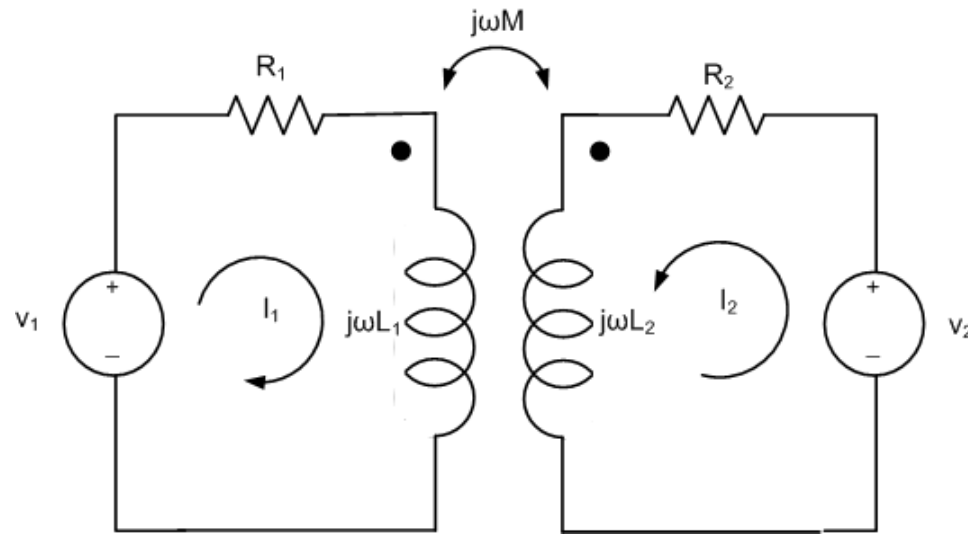
Rangkaian seperti di atas adalah rangkaian dalam wawasan waktu, maka menurut hukum tegangan Kirchhoff, persamaan tegangan pada :

$$\text{Loop 1 : } v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$\text{Loop 2 : } v_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



Dalam wawasan frekuensi, rangkaianannya adalah :



Rangkaian seperti di atas adalah rangkaian dalam wawasan frekuensi, maka menurut hukum tegangan Khirchoff, persamaan tegangan pada :

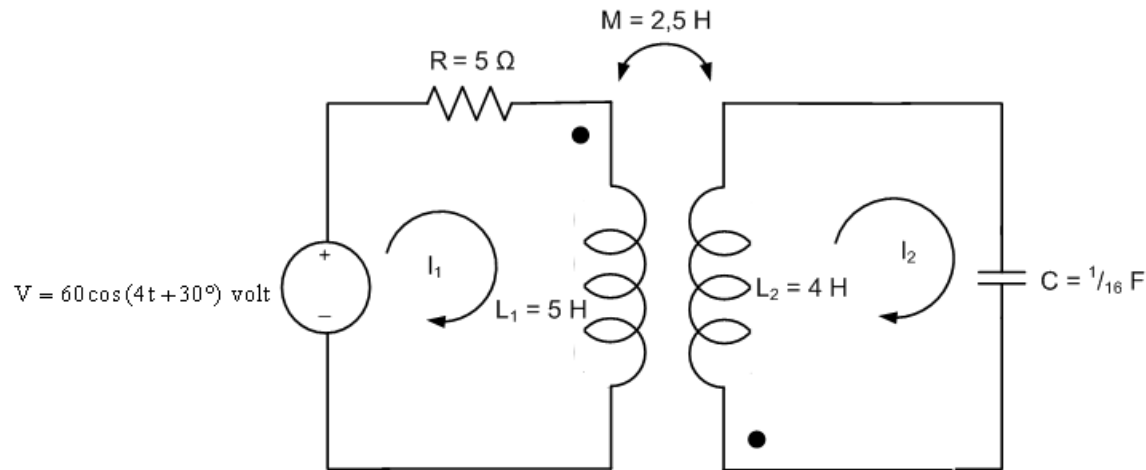
$$\text{Loop 1 :} \quad V_1 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + J\omega M I_2 = (R_1 + J\omega L_1) I_1 + J\omega M I_2$$

$$\text{Loop 2 :} \quad V_2 = J\omega M I_1 + R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 = J\omega M I_1 + (R_2 + J\omega L_2) I_2$$



Contoh :

Perhatikan rangkaian di bawah ini :

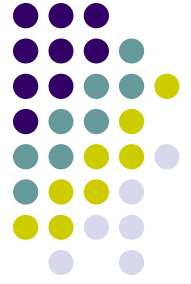


Carilah harga k dan energi yang tersimpan dalam rangkaian gandeng ini selama $t = 1$ detik.

Jawab :

Besar konstanta gandeng k adalah :

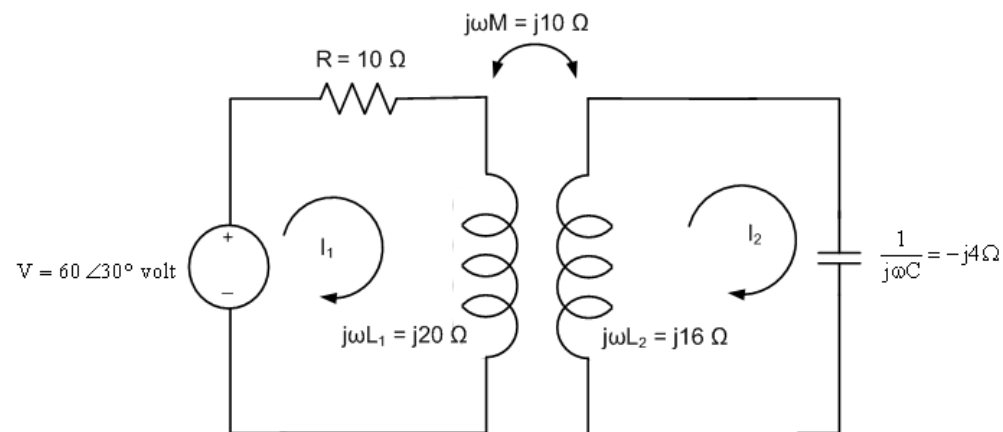
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{2,5}{\sqrt{5 \times 4}} = 0,56$$

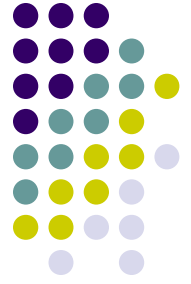


Untuk mencari energi yang tersimpan dalam rangkaian gandeng ini, maka semua besaran yang ada dalam rangkaian harus besaran wawasan frekuensi.

Disini $\omega = 4 \text{ rad/det}$	
Wawasan Waktu	Wawasan Frekuensi
$60 \cos (4t + 30^\circ)$	$60 \angle 30^\circ$
$L_1 = 5 \text{ H}$	$j \omega L_1 = j 20 \Omega$
$L_2 = 4 \text{ H}$	$j \omega L_2 = j 16 \Omega$
$C = 0,0625 \text{ F}$	$1/j \omega C = -j 4 \Omega$
$R = 10 \Omega$	$R = 10 \Omega$
$M = 2,5 \text{ H}$	$j \omega M = j 10 \Omega$

Maka rangkaian dalam wawasan frekuensi adalah :





Persamaan Loop 1 :

$$V = (R + j\omega L_1).I_1 + j\omega M.I_2 \longrightarrow (10 + j20).I_1 + j10.I_2 = 60\angle 30^\circ$$

Persamaan Loop 2 :

$$j\omega M.I_1 + (j\omega L_2 - j\omega C).I_2 = 0 \longrightarrow j10.I_1 + (j16 - j4).I_2 = 0$$

$$I_1 = \frac{-j12.I_2}{j10} \rightarrow \text{atau : } I_1 = -1,2.I_2$$

Dari Persamaan kedua Loop didapat :

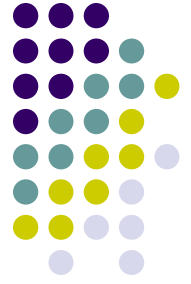
$$I_2 = \frac{60\angle 30^\circ}{(-12 - j4)} = \frac{60\angle 30^\circ}{18,432\angle -130,6^\circ} = 3,255\angle 160,6^\circ \text{ A}$$

$$I_1 = -(-3,682 + j1,296) = 3,682 - j1,296 = 3,903\angle -19,39^\circ \text{ A}$$

Dalam wawasan waktu (time domain), maka :

$$i_1 = 3,903 \cos(4t - 19,39^\circ) \text{ A} \quad \text{dan} \quad i_2 = 3,255 \cos(4t + 160,6^\circ) \text{ A}$$

Untuk : $t = 1$ detik \rightarrow maka : $4t = 4 \text{ rad} = 4 \times 57,3^\circ = 229,2^\circ$



sehingga :

$$i_1 = 3,903 \cos(229,2^\circ - 19,39^\circ) = 3,903 \cos(209,81^\circ) = -3,386 \text{ A}$$

$$i_2 = 3,255 \cos(229,2^\circ + 160,6^\circ) = 3,225 \cos(389,8^\circ) = 2,824 \text{ A}$$

sehingga total energi yang tersimpan pada rangkaian gandeng ini :

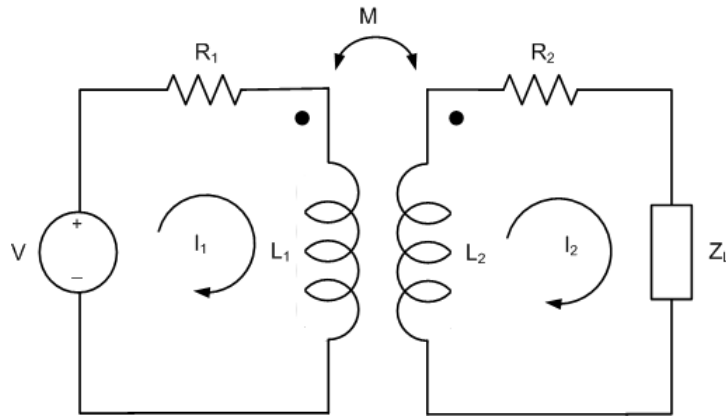
$$w = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

atau :

$$w = \frac{1}{2}(5)(-3,386)^2 + \frac{1}{2}(4)(2,824)^2 + (2,5)(-3,386)(2,824)$$

$$w = 28,662 + 15,949 - 23,905 = \underline{\underline{20,706 \text{ J}}}$$

7.5 Transformasi Linier



Gambar 7.10 Transformator linier

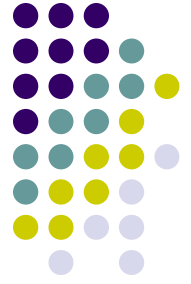
$$Z_{in} = \frac{V}{I_1} = \underbrace{(R_1 + j\omega L_1)}_{(1)} + \frac{\omega^2 M^2}{\underbrace{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}_{(2)}}$$

(1) merupakan impedansi primer

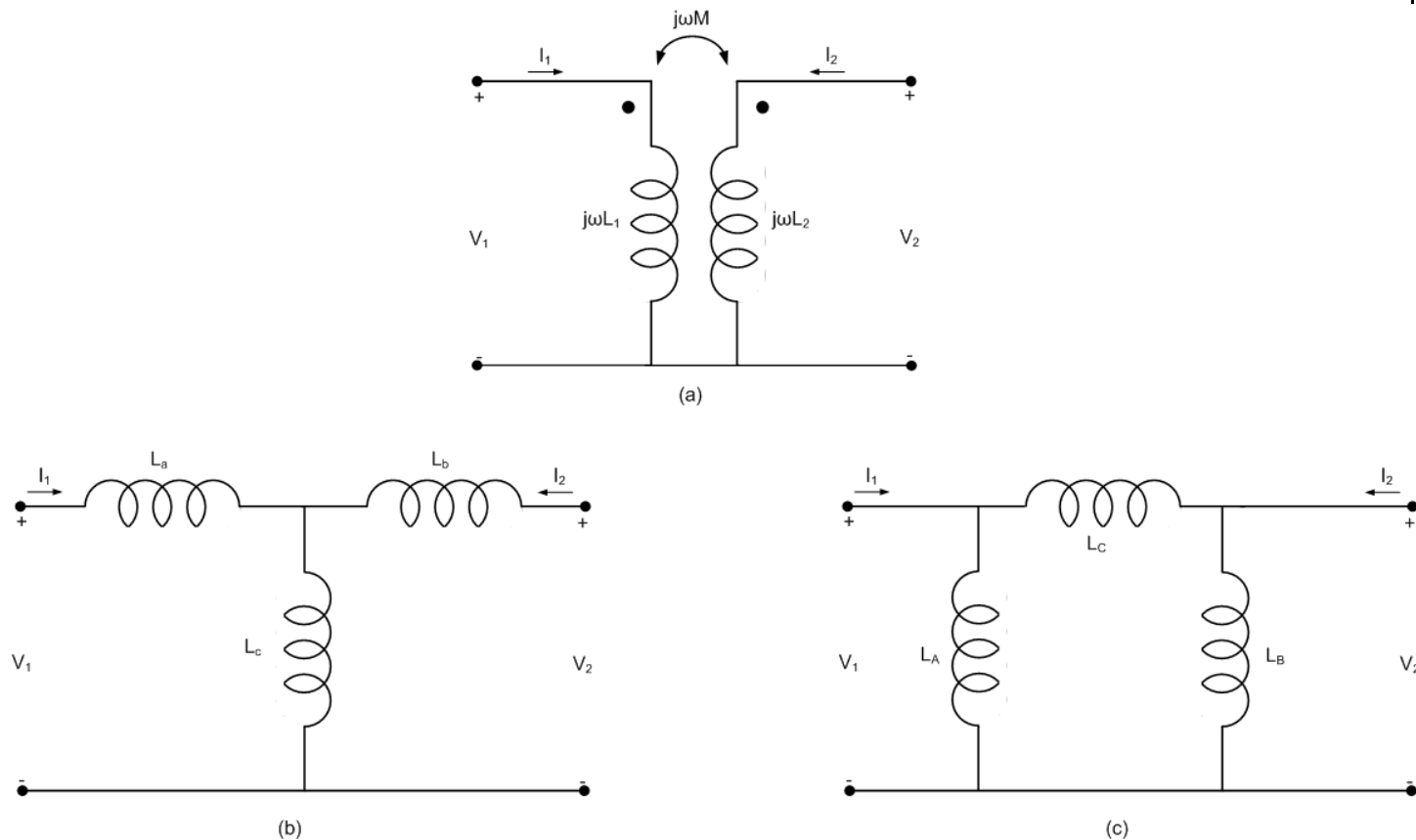
(2) menyatakan adanya kopling antara belitan primer dan sekunder dan ini menyatakan seolah-olah impedansi ini direfleksikan ke sisi primer. impedansi ini sering disebut dengan impedansi refleksi (*reflected impedance*)

Z_R .

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}$$



7.6 Rangkaian Ekuivalen Transformator Linier

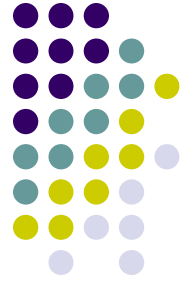


Gambar 7.11 Transformator linier (a) Rangkaian ekuivalen ;
(b) Hubungan "T" ; (c) Hubungan "Π"

Persamaan tegangan dan arus yang disusun dalam bentuk matrik untuk Gambar 7.11a :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

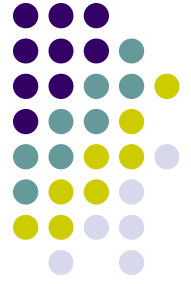


Persamaan tegangan yang disusun dalam bentuk matrik untuk Gambar 7.11b :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_b) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} L_a &= L_1 - M \\ L_c &= M \\ L_b &= L_2 - M \end{aligned}$$

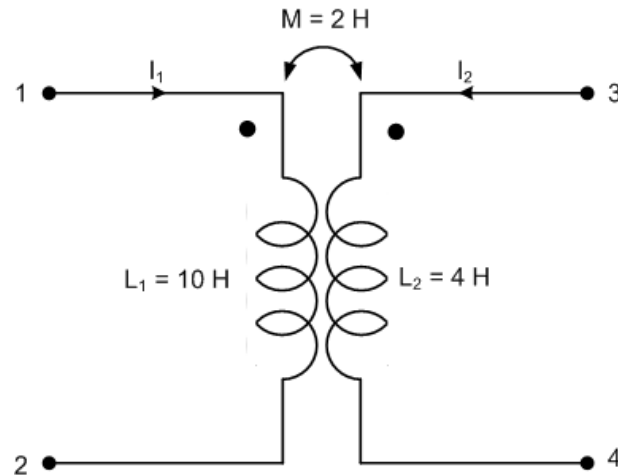
Persamaan arus yang disusun dalam bentuk matrik untuk Gambar 7.11c :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{j\omega L_A} + \frac{1}{j\omega L_C} \right) & \left(-\frac{1}{j\omega L_C} \right) \\ \left(-\frac{1}{j\omega L_C} \right) & \left(\frac{1}{j\omega L_B} + \frac{1}{j\omega L_C} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} L_A &= \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M} \\ L_B &= \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M} \\ L_C &= \frac{L_1L_2 - M^2}{M} \end{aligned}$$



Contoh :

Buatlah rangkaian ekuivalen hubungan T dari transformator linear dibawah ini :



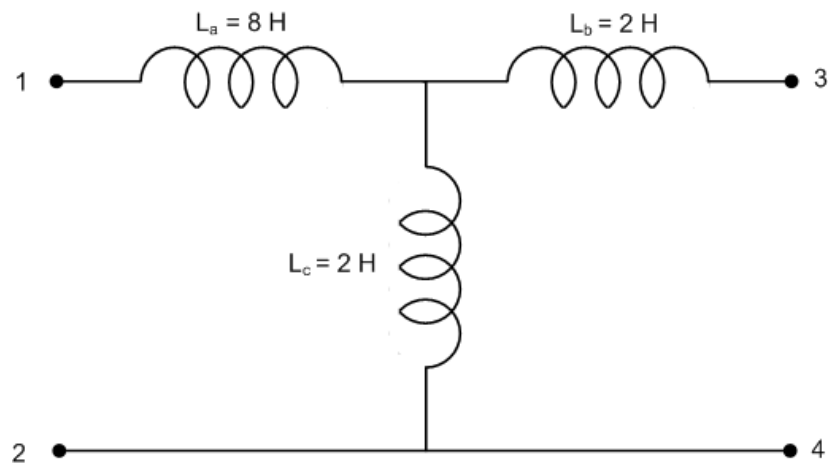
Jawab :

Dalam hubungan T berlaku :

$$L_a = L_1 - M = 10 - 2 = 8H$$

$$L_c = M = 2H$$

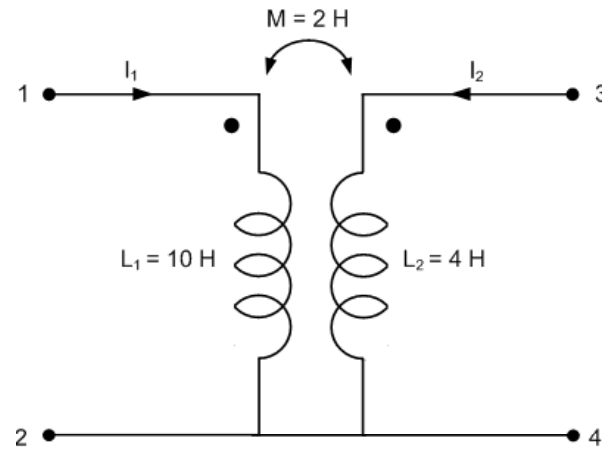
$$L_b = L_2 - M = 4 - 2 = 2H$$





Contoh :

Carilah rangkaian ekivalen hubungan Π dari rangkaian transformator linear dibawah ini :



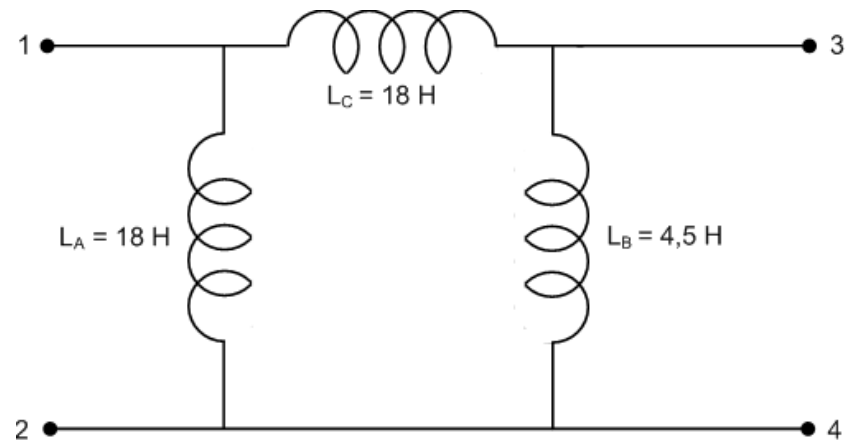
Jawab :

Dalam hal ini :

$$L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} = \frac{10 \cdot 4 - 2^2}{4 - 2} = 18 \text{ H}$$

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} = \frac{10 \cdot 4 - 2^2}{10 - 2} = 4,5 \text{ H}$$

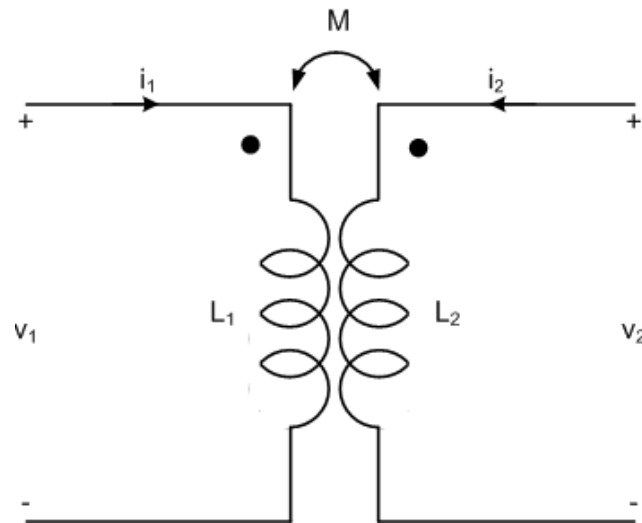
$$L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} = \frac{10 \cdot 4 - 2^2}{2} = 18 \text{ H}$$



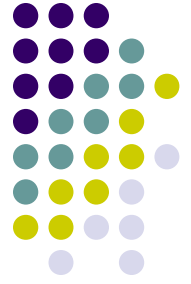
7.7 Tranformator Ideal



Tranformator ideal adalah suatu peralatan yang memiliki koefisien gandeng $k = 1$ yang terdiri dari dua atau lebih kumparan dengan jumlah belitan yang banyak yang dililitkan pada inti dari bahan yang memiliki permeabilitas yang tinggi, yang mana hal ini menyebabkan semua fluksi akan melingkupi seluruh kumparan.



Gambar 7.12 Tranformator ideal



$$\text{Untuk } k = 1 \quad \longrightarrow \quad M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + \frac{V_1 M}{L_1} - \frac{j\omega M^2 I_2}{L_1}$$

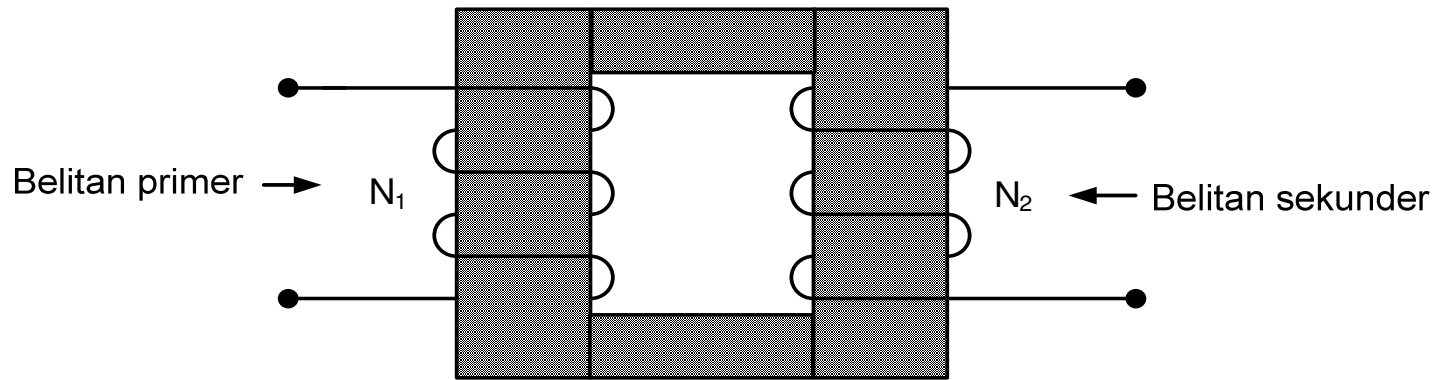
$$V_2 = \frac{V_1 \sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L_1} = \frac{V_1 \sqrt{\frac{L_1^2 L_2}{L_1}}}{L_1} = \frac{V_1 L_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{L_1} = V_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

bila dimisalkan perbandingan belitan :

$$M = \sqrt{L_1 / L_2} \quad \longrightarrow \quad V_2 = nV_1$$

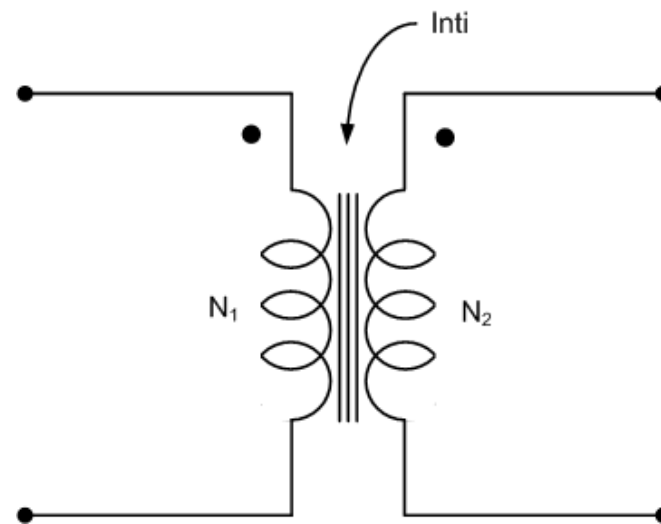
Adapun sifat-sifat dari suatu transformator ideal diantaranya adalah :

1. Kumparannya memiliki harga reaktansi yang sangat besar ($L_1; L_2; M \rightarrow \infty$)
2. Koefensi gandeng $k = 1$
3. Kumparan primer dan sekundur tanpa rugi-rugi ($R_1 = 0 = R_2$)

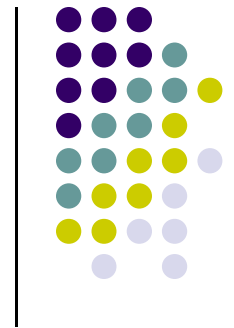
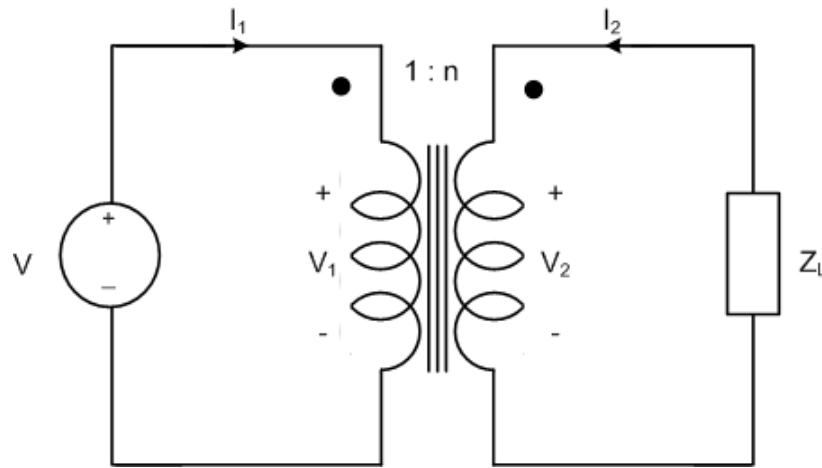


Gambar 7.13 Transformator ideal

transformator ideal sering disimbolkan dengan :



Gambar 7.14 Simbol transformator ideal



Gambar 7.15 Transformator ideal dengan sumber tegangan ac pada sisi primer

Maka :

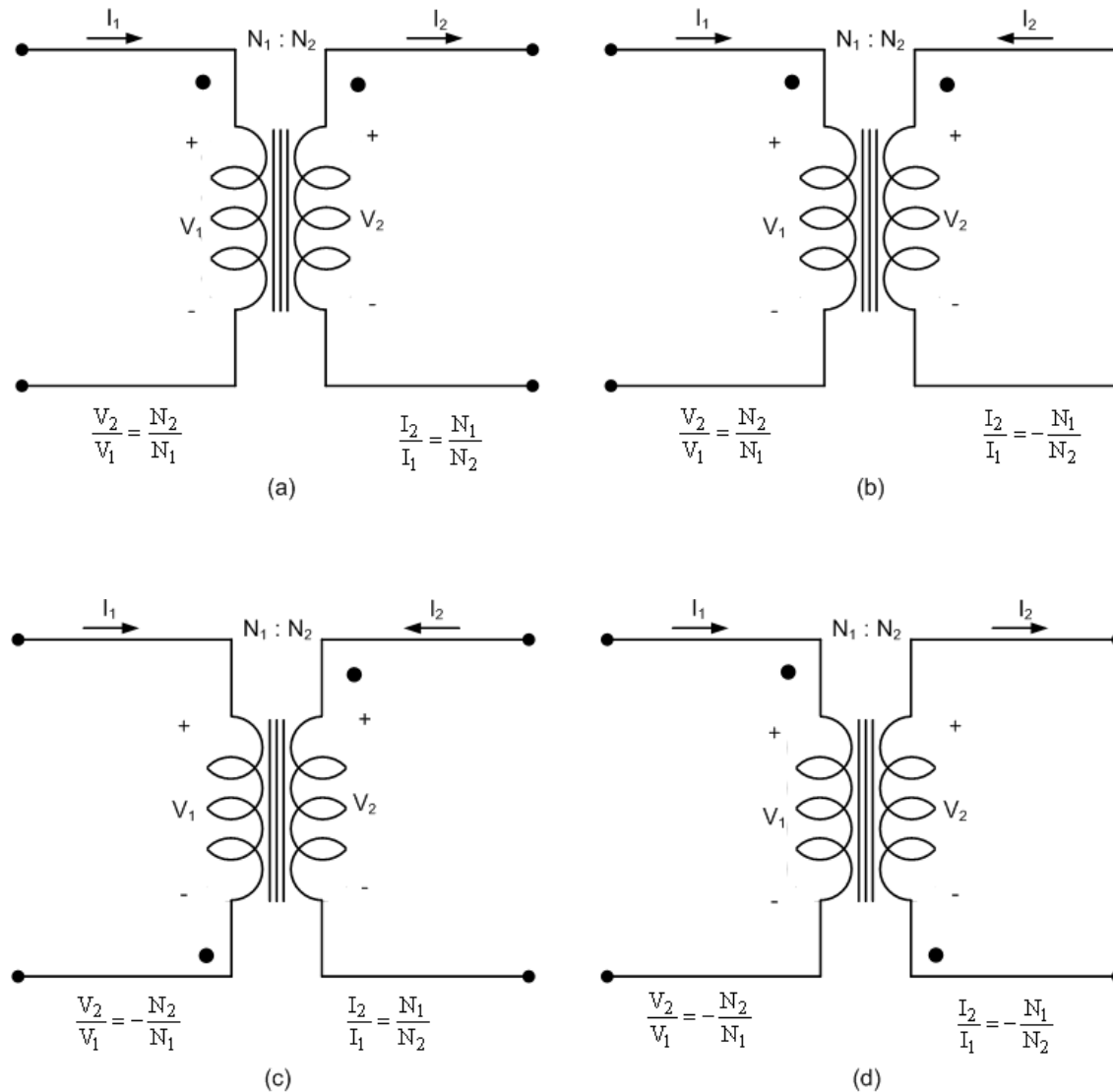
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad \longrightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

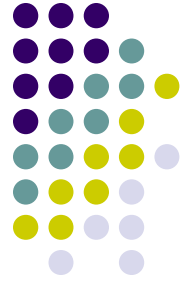
Bilamana $n = 1$: transformator isolasi (*isolation tranformer*)

Bilamana $n > 1$: tranformator penaik tegangan (*step-up transformer*)

Bilamana $n < 1$: transformator penurun tegangan (*step-down tranformer*)

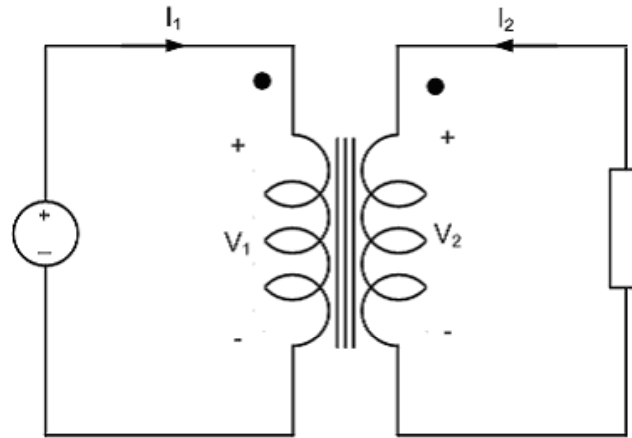


Gambar 7.16 Untuk menentukan polaritas tegangan dan arah arus pada transformator ideal



Daya kompleks pada sisi primer dinyatakan dengan :

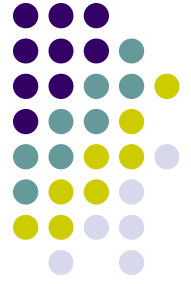
$$S_1 = V_1 I_1^* = \frac{V_2}{n} (n I_2)^* = V_2 I_2^* = S_2$$



Gambar 7.17 Rangkaian untuk menyatakan impedansi input Z_{in}

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{V_2}{I_2} \quad \longrightarrow \quad Z_L = V_2 / I_2$$

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{n^2}$$



Contoh :

Sebuah tranfomator ideal dengan data-data : 2400/120 vol; 9,6 kVA dimana jumlah belitan pada sisi sekunder 50 lilitan. Hitunglah :

- a. Perbandingan belitan n
- b. Banyak belitan pada sisi primer
- c. Arus primer dan sekunder (I_1 dan I_2)

Jawab :

Tranformator ini adalah tranformator step-down

tegangan primer $V_1 = 2400$ volt dan tegangan sekunder $V_2 = 120$ volt.

Maka :

a. Perbandingan belitan adalah : $n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{120}{2400} = 0,05$

b. Banyak belitan sisi primer : $n = \frac{N_2}{N_1} \longrightarrow N_1 = \frac{N_2}{n} = \frac{50}{0,05} = 1000$ lilitan

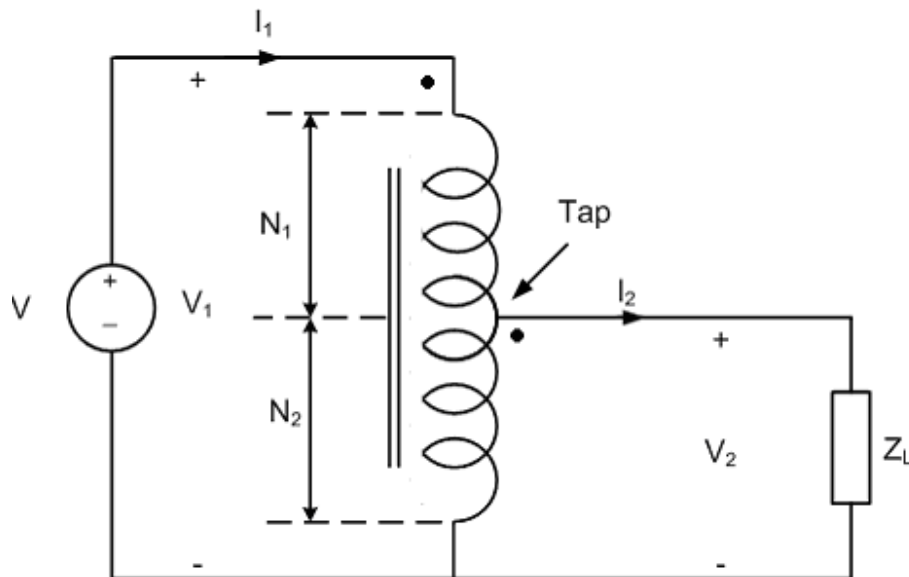
c. Daya semu tranformator adalah : $S = V_1 I_1 = V_2 I_2 = 9,6$ kVA

$$I_1 = \frac{S}{V_1} = \frac{9600}{2400} = 4 \text{ Amp.} \quad \text{dan} \quad I_2 = \frac{S}{V_2} = \frac{9600}{120} = 80 \text{ Amp.}$$



7.8 Autotransformator Ideal

Autotransformator adalah sebuah transformator dimana bagian primer dan sekunder-nya dalam satu belitan dengan sebuah terminal diantara sisi primer dan sekunder (selalu disebut dengan tap).

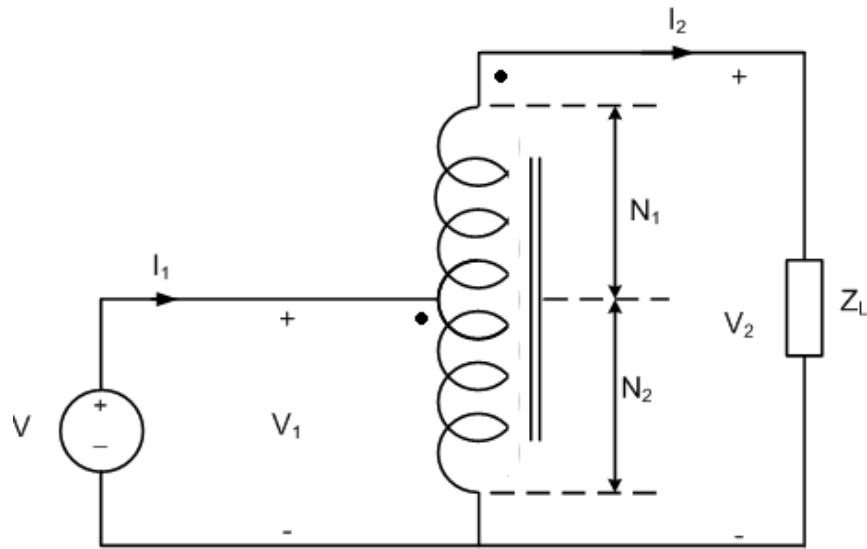


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2}$$

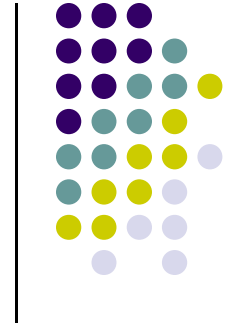
$$S_1 = V_1 I_1^* = S_2 = V_2 I_2^*$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$$

Gambar 7.18 Autotransformator penurun tegangan

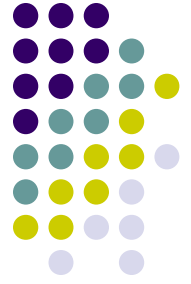


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$



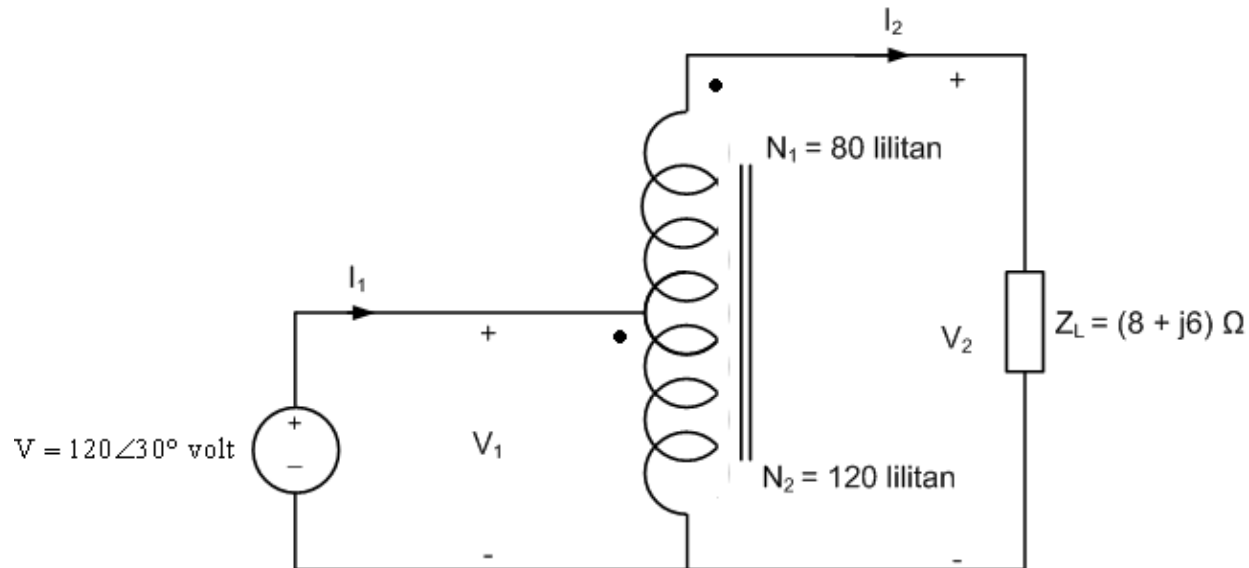
Gambar 7.19 Autotransformator penaik tegangan

Adapun perbedaan yang utama antara transformator ideal dengan autotranformator ideal ini adalah pada autotranformator sisi primer dan sekunder selain terhubung secara magnetik juga terhubung konduktif.



Contoh :

Dari rangkaian autotransformator dibawah ini :



Hitunglah besar : a. I_1 , I_2 dan I_o

b. Daya kompleks yang disuplai ke beban

Z_L

Jawab :

a. Autotransformator adalah penaik tegangan sehingga berlaku :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{80}{80 + 120} = \frac{80}{200}$$

$$V_2 = \frac{200}{80} V_1 = \frac{200}{80} (120 \angle 30^\circ) = 300 \angle 30^\circ \text{ volt}$$

dari rangkaian terlihat bahwa :

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L} = \frac{300 \angle 30^\circ}{(8 + j6)} = \frac{300 \angle 30^\circ}{10 \angle 36,87^\circ} = 30 \angle -6,87^\circ \text{ Amp.}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \frac{80 + 120}{80} = \frac{200}{80} \quad \longrightarrow \quad I_1 = \frac{200}{80} I_2 = 75 \angle -6,87^\circ \text{ Amp.}$$

$$I_2 = I_1 + I_o \quad \longrightarrow \quad I_o = I_2 - I_1 = (30 \angle -6,87^\circ) - (75 \angle -6,87^\circ) = 45 \angle 173,12^\circ$$

b. Adapun daya kompleks yang disuplai ke beban adalah :

$$S_2 = V_2 I_2^* = |I_2| Z_L = 30^2 (10 \angle 36,87^\circ) = 9000 \angle 36,87^\circ = 9 \angle 36,87^\circ \text{ kVA}$$

