BAB 5
PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN ORDE TINGGI

Oleh :
Ir. A.Rachman Hasibuan dan
Naemah Mubarakah, ST

5.1 Pendahuluan

Metode penyelesaian untuk persamaan diferensial homogen untuk orde *n* dengan persamaan karakteristik seperti di bawah ini :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$$a_0 (s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n) = 0$$

$$i = K_1 \varepsilon^{s_1 t} + K_1 \varepsilon^{s_2 t} + \ldots + K_1 \varepsilon^{s_{n-1}} + K_1 \varepsilon^{s_n}$$

Ada tiga kemungkinan yang bisa terjadi pada akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut :

1. Akar-akar persamaan karakteristik merupakan akar yang riil.
2. Akar-akar persamaan karakteristik merupakan akar yang imajiner.
3. Akar-akar persamaan karakteristik merupakan akar yang kompleks.

5.2 Persamaan Karakteristik Orde Satu

Misalkan persamaan karakteristik berbentuk sebagai berikut :

$$a_0 s + a_1 = 0$$

maka akar persamaan ini adalah :

$$s = -\frac{a_1}{a_0}$$

maka akar ini selalu riil dan negatif karena a_0 dan a_1 selalu riil dan positif.

5.3 Persamaan Karakteristik Orde Dua

Misalkan persamaan karakteristik berbentuk sebagai berikut :

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \qquad \text{atau :} \qquad s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + \frac{a_2}{a_0} = 0$$

maka akar-akar persamaan ini adalah :

$$s1, s2 = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{1}{2a_0}\sqrt{a_1^{\;2} - 4.a_0.a_2}$$

disini akar-akar ini bisa riil, imajiner atau kompleks dan kalau akar-akarnya kompleks haruslah merupakan kompleks sekawan/konjugasi.

5.4 Persamaan Karakteristik Orde Tiga

Akar-akar persamaan karakteristik merupakan sepasang, sepasang akar-akar kompleks sekawan, ataupun setidak-tidaknya satu akarnya harus riil dan yang duanya lainnya, bisa kedua-duanya riil atau pasangan konjugasi akar-akar sekawan.

5.5 Persamaan Karakteristik Orde Empat

Dalam hal ini ada beberapa kemungkinan :

1. Ke-empat akarnya riil
2. Dua riil dan sepasang kompleks sekawan
3. Dua pasang akar kompleks sekawan

Ada beberapa aturan dapat dipergunakan yang berhubungan dengan akar-akar tersebut :

1. Apabila akar-akarnya kompleks sekawan, maka akarnya dalam bentuk pasangan sekawan.
2. Bilamana persamaan karakteristik ber-orde ganjil, paling sedikit satu akar riil dan sisanya bisa riil atau dalm pasangan kompleks sekawan.
3. Bilamana persamaan karakteristik ber-orde genap, akar-akarnya bisa riil atau pasangan kompleks sekawan.

5.6 Penyelesaian Persamaan Diferensial Tidak Homogen

Total penyelesaian dari persamaan diferensial tidak homogen diberikan oleh :

$$i = i_p + i_c$$

Adapun tipe bentuk gelombang sebagai fungsi penggerak pada rangkaian listrik adalah misalnya v(t) dapat berupa :

1. Suatu konstanta
2. Berbentuk sin ωt ; cos ωt ; Kt
3. Perkalian dari suku-suku tersebut
4. Kombinasi linier untuk mendapatkan gelombang siku-siku, pulsa dan sebagainya.

Adapun beberapa metode yang dapat dipergunakan untuk mencari partikular integral antara lain dengan metode koefisien tak-tentu (*method of underemined coefficient*).

Langkah-langkah penggunaan metode koefisien tak-tentu antara lain :

1. Pilih fungsi percobaan dari semua bentuk yang mungkin bisa memenuhi persamaan diferensial seperti pada Tabel 5.1.
2. Setiap fungsi percobaan ditandai koefisien tak-tentu.
3. Jumlah semua fungsi percobaan disubstitusikan kedalam persamaan diferensial, akan diperoleh seperangkat persamaan aljabar linier dengan menyamakan koefisien-koefisien fungsi yang sama dalam persamaan yang dihasilkan dari hasil substitusi tersebut.
4. Koefisien-koefisien tak-tentu, ditentukan oleh pemecahan seperangkat persamaan aljabar tersebut.

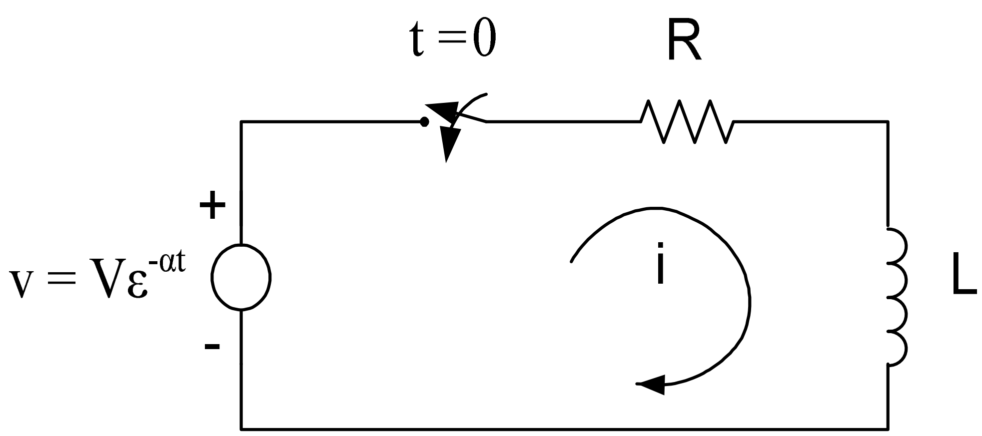
Tabel 5.1 Pilihan Penyelesaian Percobaan

<table>
<tr><th>Faktor Dalam v(t) *)</th><th>Pilihan Bagi Integral Khusus **)</th></tr>
<tr><td>1. V (konstanta)</td><td>A</td></tr>
<tr><td>2. $a_1 t^n$</td><td>$B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_{n-1} t + B_n$</td></tr>
<tr><td>3. $a_2 \varepsilon^{mt}$</td><td>$C\varepsilon^{mt}$</td></tr>
<tr><td>4. $a_3 \cos \omega t$</td><td rowspan="2">$D \cos \omega t + E \sin\omega t$</td></tr>
<tr><td>5. $a_4 \sin \omega t$</td></tr>
<tr><td>6. $a_5.t^n.\varepsilon^{mt} \cos \omega t$</td><td rowspan="2">$(F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \dots + F_{n-1} t + F_n) \varepsilon^{mt} \cos \omega t +$
$(G_0 t^n + G_1 t^{n-1} + \dots + G_{n-1} t + G_n) \varepsilon^{mt} \sin \omega t$</td></tr>
<tr><td>7. $a_6.t^n.\varepsilon^{mt} \sin \omega t$</td></tr>
</table>

*) Bilamana v(t) terdiri dari jumlah beberapa suku, maka integral khusus yang tepat adalah jumlah integral khusus bersesuaian/padanan masing-masing suku itu sendiri-sendiri.

**) Bilamana sebuah suku dari integral yang dicoba manapun yang tertera dalam kolom ini telah merupakan bagian fungsi komplementer dari persamaan yang diberikan, maka perlu diadakan modifikasi pilihan yang ditunjukan dengan mengalikannya dengan t sebelum digunakan. Bila suku yang demikian muncul sebanyak *m* kali dalam funsi komplementer, maka pilihan yang ditunjukan harus dikalikan dengan t^m.

5.7 Response RL Seri Dengan Input Fungsi Eksponensial



Gambar 5.1 Rangkaian RL seri dengan sumber fungsi ekponensial

Dengan menggunakan hukum tegangan Kirchhoff dapat dituliskan :

$$L\frac{di}{dt} + R.i = V\varepsilon^{-\alpha t} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i = \frac{V}{L}\varepsilon^{-\alpha t}$$

maka persamaan karakteristiknya adalah : $A.\varepsilon^{-\alpha t}$

sehingga penyelesaian komplementer adalah : $i_c = K\varepsilon^{-\alpha t}$

maka melihat ke Tabel 5.1, penyelesaian yang dicoba adalah :

$$i_p = A.\varepsilon^{-\alpha t}$$

dimana A adalah merupakan koefisien tak-tentu, maka untuk $i = i_p$,
Persamaan menjadi:

$$-\alpha.A.\varepsilon^{-\alpha t} + \frac{R}{L}.A.\varepsilon^{-\alpha t} = \frac{V}{L}.\varepsilon^{-\alpha t}$$

1. Bilamana : $\alpha \neq \dfrac{R}{L}$

$$A = \frac{V}{R - \alpha L} \quad \longrightarrow \quad i_p = \frac{V}{R - \alpha L}.\varepsilon^{-\alpha t}$$

sehingga penyelesaian lengkapnya adalah :

$$i = ip + ic \quad \longrightarrow \quad i = K.\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R - \alpha L}.\varepsilon^{-\alpha t}$$

dimana konstanta sembarang K dapat ditentukan dari kondisi awal.

2. Bilamana : $\alpha = \dfrac{R}{L}$

$$i_p = At.\varepsilon^{-\alpha t}$$

dari :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i = \frac{V}{L}\varepsilon^{-\alpha t} \longrightarrow A(-\alpha t\varepsilon^{-\alpha t} + \varepsilon^{-\alpha t}) + \alpha At\varepsilon^{-\alpha t} = \frac{V}{L}\varepsilon^{-\alpha t}$$

diperoleh : $A = \dfrac{V}{L} \longrightarrow i_p = \dfrac{V}{L}t.\varepsilon^{-\alpha t}$

sehingga penyelesaian lengkapnya :

$$i = i_p + i_c \longrightarrow i = K.\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{L}t\varepsilon^{-\alpha t}$$

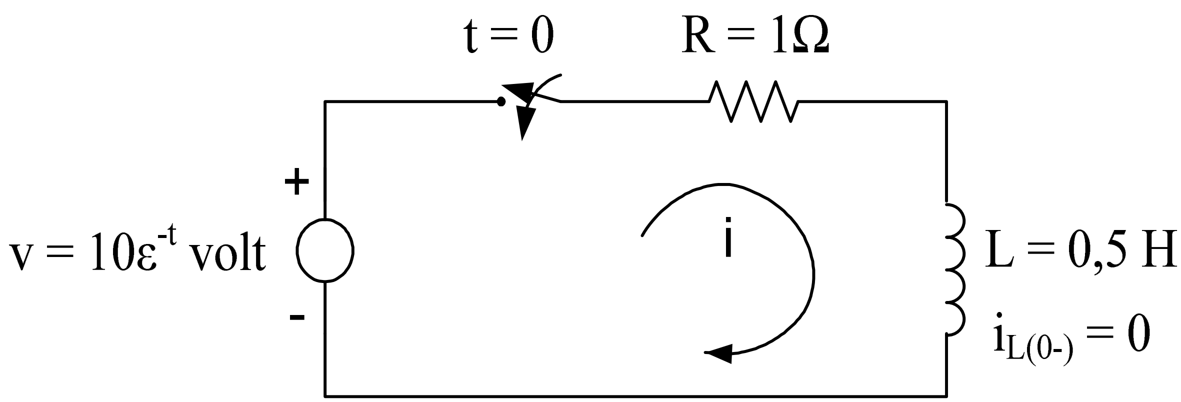
atau :

$$i = \varepsilon^{-\alpha t}\left(K. + \frac{V}{L}t\varepsilon^{-\alpha t}\right)$$

dimana konstanta sembarang K dapat ditentukan dari kondisi awal.

Contoh :

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



Carilah bentuk persamaan arus i.

Jawab :

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i = \frac{10}{L}\varepsilon^{-t} \quad \rightarrow \quad \frac{di}{dt} + 2.i = 20\varepsilon^{-t}$$

maka persamaan karakteristik : $s + 2 = 0$

sehingga penyelesaian komplementer : $i_c = K\varepsilon^{-2t}$

Penyelesaian integral khusus :

$$i_p = A\varepsilon^{-t}$$

terlihat bentuknya tidak sama dengan fungsi komplementer, maka untuk $i = i_p$:

$$\frac{di}{dt} + 2.i = 20\varepsilon^{-t} \longrightarrow -A\varepsilon^{-t} + 2A\varepsilon^{-t} = 20\varepsilon^{-t} \longrightarrow A = 20$$

Sehingga penyelesaian integrla khusus adalah :

$$i_p = 20\varepsilon^{-t}$$

sehingga penyelesaian lengkap :

$$i = i_p + i_c \longrightarrow i = K\varepsilon^{-2t} + 20\varepsilon^{-t}$$

Pada t = 0+ , didapat K = 20

Sehingga di dapat persamaan arus pada rangkaian setelah sklar ditutup :

$$\underline{i = 20\left(\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}\right) \quad \text{Amp.}}$$