BAB 4
PENGANALISAAN RANGKAIAN DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA ATAU LEBIH TINGGI

Oleh :
Ir. A.Rachman Hasibuan dan
Naemah Mubarakah, ST

4.1 Pendahuluan

Pada umumnya persamaan diferensial homogen orde dua dengan koefisien konstan diperlihatkan sebagai berikut.

$$a_0 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_2 i = 0$$

penyelesaiannya berbentuk eksponensial yang dimisalkan dengan :

$$i(t) = K.\varepsilon^{st} \longrightarrow \frac{di}{dt} = K.s.\varepsilon^{st} \longrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} = K.s^2.\varepsilon^{st}$$

Sehingga : $a_0 s^2 K\varepsilon^{st} + a_1 s K\varepsilon^{st} + a_2 K\varepsilon^{st} = 0$

oleh karena harga $K\varepsilon^{st}$ tidak akan pernah nol untuk harga t yang terbatas :

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

$$s_1;s_2 = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{1}{2a_0}\sqrt{a_1{}^2 - 4a_0a_2}$$

oleh sebab itu terdapat dua bentuk eksponensial dari penyelesaian persamaan diferensial homogen , yaitu :

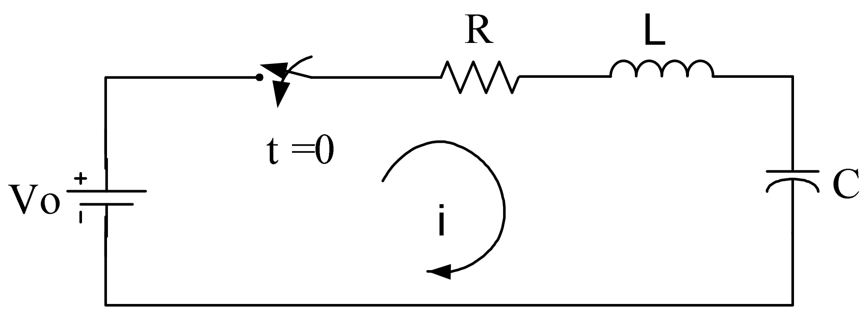
$$i_1 = K_1\varepsilon^{s_1t} \text{ dan } i_2 = K_1\varepsilon^{s_2t}$$

jumlah penyelesaian-penyelesaian ini adalah : $i_3 = i_1 + i_2$

maka secara umum dapat dinyatakan penyelesaian ini adalah :

$$i(t) = K_1.\varepsilon^{s_1t} + K_2.\varepsilon^{s_2t}$$

4.2 Respons Rangkaian RLC Seri Dengan Input Unit Step



Gambar 4.1 Rangkaian seri RLC dengan input tegangan searah

maka pada saat t = 0 saklar ditutup, sehingga dapat dituliskan persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_o$$

bila dideferensialkan : $$L.s^2 + R.s + \frac{1}{C} = 0 \longrightarrow s = \frac{d}{dt}$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan karakteristik rangkaian di atas

Adapun akar-akar persamaan karakteristik ini adalah :

$$s_1 ; s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}$$

maka bentuk umum penyelesaian dari persamaan diferensial :

$$i = K_1 . \varepsilon^{s_1 t} + K_2 . \varepsilon^{s_2 t}$$

1. Bilamana : R2 > $\frac{4L}{C}$ (keadaan *overdamped* / teredam lebih)

Dalam kondisi ini besaran $\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)$ adalah positif,

sehingga akar-akar s1 dan s2 adalah nyata.

maka pada t = 0, bagian dari $\frac{1}{C}\int i\,dt = 0$

maka : $L\frac{di_{(0+)}}{dt} + R.0 + \frac{1}{C}\int 0\,dt = V_o \longrightarrow \frac{di_{(0+)}}{dt} = \frac{V_o}{L}$

$$i(0+) = 0 = K_1.\varepsilon^{s_1 0} + K_2.\varepsilon^{s_2 0} \longrightarrow K_1 + K_2 = 0$$

$$\frac{di}{dt} = s_1K_1.\varepsilon^{s_1 t} + s_2K_2.\varepsilon^{s_2 t} \longrightarrow \frac{di_{(0+)}}{dt} = \frac{V_o}{L} = s_1K_1.\varepsilon^{s_1 0} + s_2K_2.\varepsilon^{s_2 0}$$

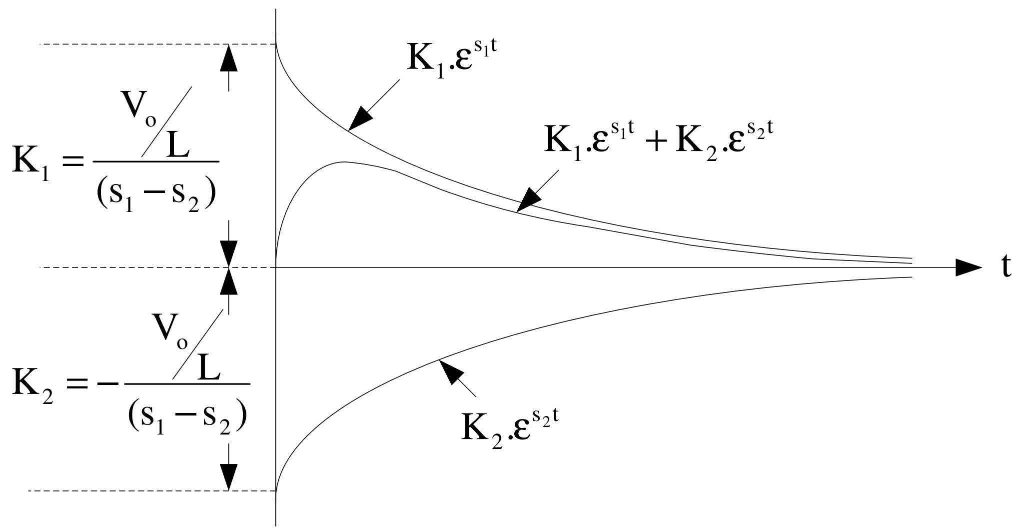
$$s_1K_1 + s_2K_2 = \frac{V_o}{L}$$

akan diperoleh :

$$K_1 = \frac{V_o}{L(s_1 - s_2)} \qquad \text{dan} \qquad K_2 = \frac{V_o}{L(s_2 - s_1)}$$

Karena :

$$i = K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t} \longrightarrow i = \frac{V_o/L}{(s_1 - s_2)}\left(\varepsilon^{s_1 t} - \varepsilon^{s_2 t}\right)$$



Gambar 4.2 Kurva arus pada rangkaian seri RLC dengan input step pada

kondisi $R > \frac{4L}{C}$

2. Bilamana : R2 = $\frac{4L}{C}$ (keadaan *critical damped* / teredam lebih)

Pada kondisi ini besaran $\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)$ menjadi nol, oleh karena itu akar persamaan karakteristik adalah nyata dan sama, sehingga :

$$i = K_1\varepsilon^{st} + K_2 t\varepsilon^{st}$$

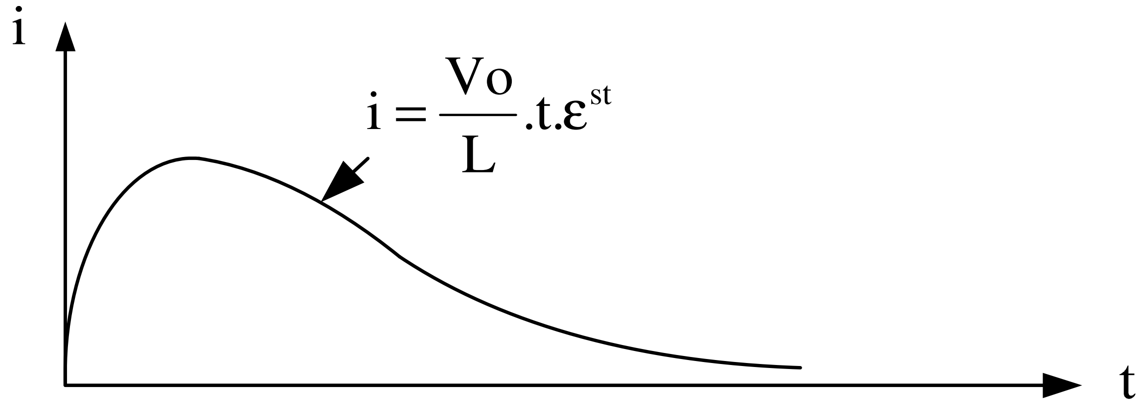
Di dalam hal ini kondisi awal : $i(0+) = 0$ dan $\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L}$

maka : $i = K_2 t\varepsilon^{st}$ dimana : $s = -\frac{R}{2L}$

$$\frac{di}{dt} = K_2\left(\varepsilon^{st} + st\varepsilon^{st}\right) \longrightarrow \frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L} = K_2\left(\varepsilon^{s0} + s.0.\varepsilon^{s0}\right) \longrightarrow K_2 = \frac{Vo}{L}$$

sehingga : $i = \frac{Vo}{L}.t.\varepsilon^{st}$

dan kalau digambarkan kurvanya adalah :



Gambar 4.3 Kurva arus pada rangkaian seri RLC dengan input step

pada kondisi R > $\frac{4L}{C}$

Bilamana : R2 < $\frac{4L}{C}$(keadaan *underdamped* / kurang teredam)

Pada kondisi ini besaran $\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)$negatif, oleh karena itu akar persamaan karakteristik adalah bilangan kompleks, yang dimisalkan :

$$s_1 = A + jB \text{ dan } s_2 = A - jB.$$

dimana :

$$A = \frac{-R}{2L} \quad \text{dan} \quad B = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}$$

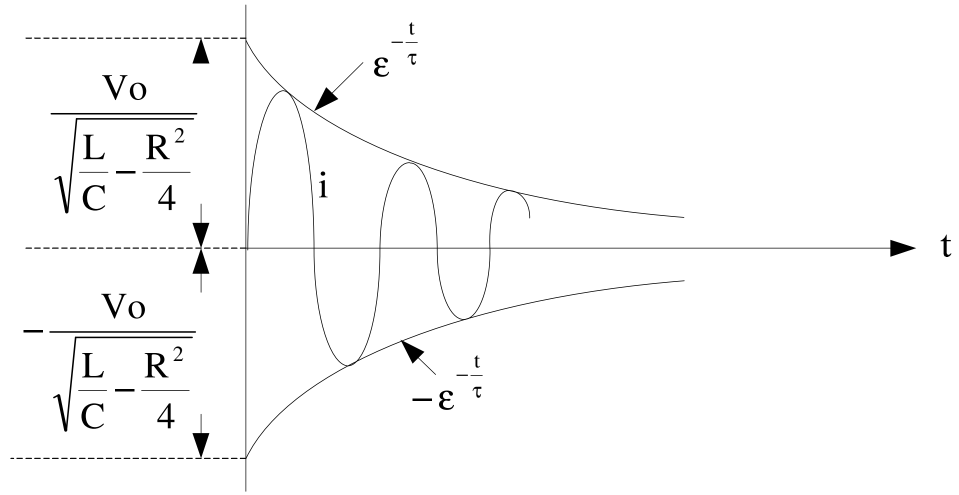
sehingga : $i = K_1 \varepsilon^{(A+jB)t} + K_2 \varepsilon^{(A-jB)t}$

Jika diturunkan akan di dapat persamaan arus nya :

$$i = \frac{Vo.\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}.\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right).t$$

terlihat bahwa dalam keadaan ini arus berosilasi, dan kalau bagian eksponensial $\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}$ dihilangakan, maka arus i murni sinusoidal dengan frekuensi resonansi (*natural angular frequency*).

$$\omega_n = \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right) \quad \left[\text{radian}/\text{detik}\right] \qquad \text{atau} \qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right) \quad \left[\text{siklus}/\text{detik}\right]$$

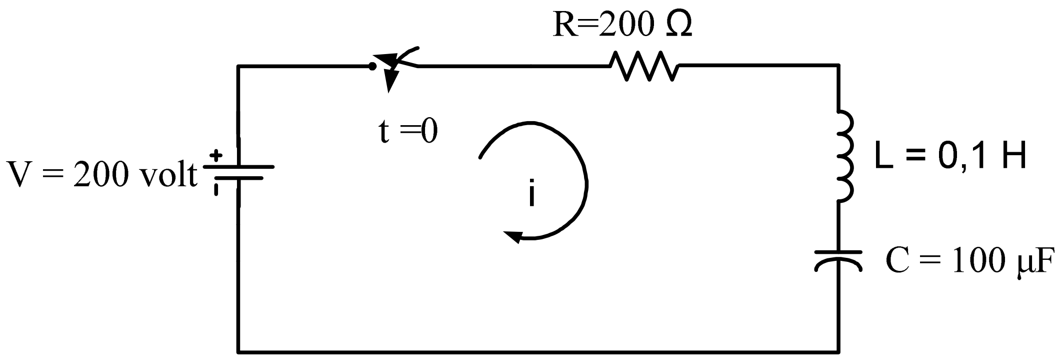


Gambar 4.4 Kurva arus dari rangkaian seri RLC dengan input unti step

pada kondisi R < $\dfrac{4L}{C}$

Contoh :

Saklar pada rangkaian di bawah ini ditutup pada saat t = 0, dengan mengabaikan semua kondisi awal elemen rangkaian, carilah bentuk persamaan arus i.



Jawab :

Bila saklar ditutup, persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$L\frac{di}{dt}+R.i+\frac{1}{C}\int i\,dt=V \longrightarrow \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}.i+\frac{1}{LC}\int i\,dt=\frac{V}{L}$$

$$\frac{di}{dt}+\frac{200}{0,1}.i+\frac{1}{(0,1).(100.10^{-6})}\int i\,dt=\frac{200}{0,1} \longrightarrow \frac{di}{dt}+2000.i+10.10^{4}\int i\,dt=2000$$

$$\frac{d^2 i}{d^2 t} + 2000.\frac{di}{dt} + 10.10^4.i = 0 \longrightarrow \left(\frac{d^2}{d^2 t} + 2000.\frac{d}{dt} + 10.10^4\right)i = 0$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s \longrightarrow \left(s^2 + 2000.s + 10.10^4\right)i = 0$

sehingga : $\left(s^2 + 2000.s + 10.10^4\right) = 0$

Di dapat : $s_1 = \frac{-2000 + \sqrt{2000^2 - 4(10.10^4)}}{2.1} = -51{,}31$

$$s_2 = \frac{-2000 - \sqrt{2000^2 - 4(10.10^4)}}{2.1} = -1948{,}68$$

dari rangkaian dapat dilihat :

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{200}{2.0{,}1}\right)^2 = 1.10^6 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0{,}1).(100.10^{-6})} = 1.10^5$$

ternyata : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ atau $R^2 > \frac{4L}{C}$, sehingga

$$i = K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t} \longrightarrow i = K_1.\varepsilon^{-51,31.t} + K_2.\varepsilon^{-1948,68.t}$$

untuk t = 0, diperoleh : $\underbrace{i(0+)}_{\downarrow \atop 0} = K_1.\varepsilon^{-51,31.0} + K_2.\varepsilon^{-1948,68.0}$

sehingga diperoleh : $0 = K_1 + K_2$

dan demikian juga pada C yang tidak bisa berubah dengan seketika,

sehingga $\frac{1}{C}\int i\,dt = 0$ maka :

$$L\frac{di}{dt}(0+) + R.\underbrace{i(0+)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i\,dt}_{\downarrow \atop 0} = V \longrightarrow \frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = \frac{200}{0,1} = 2000\ \text{Amp/det}$$

$$\underbrace{\frac{di}{dt}(0+)}_{\downarrow \; 2000} = -51{,}31.K_1.\varepsilon^{-51{,}31.0} + 1948{,}68.K_2.\varepsilon^{-1948{,}68.0}$$

$$2000 = -51{,}31.K_1 + 1948{,}68.K_2$$

Substitusikan dengan persamaan : 0 = K1 + K2

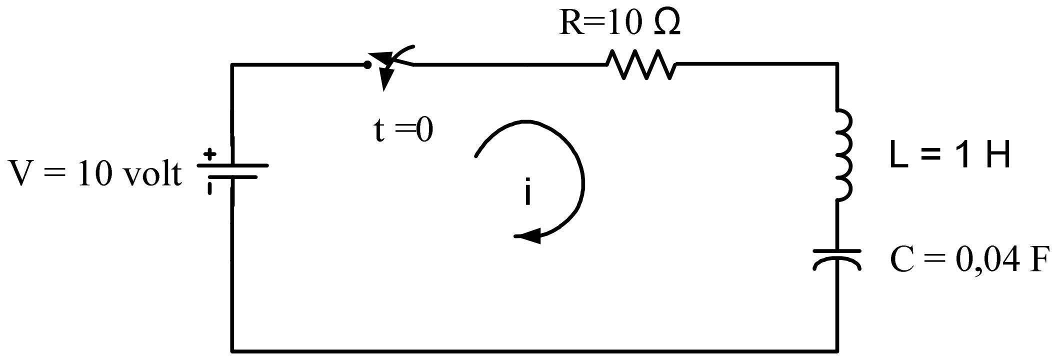
maka diperoleh : $K_1 = 1$ dan $K_2 = -1$

Sehingga di dapat persamaan arus pada rangkaian :

$$\underline{i = \varepsilon^{-51{,}31.t} - .\varepsilon^{-1948{,}68.t} \quad \text{Amp.}}$$

Contoh :

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



dengan mengabaikan kondisi awal, pada saat t = 0 saklar ditutup. Carilah bentuk persamaan arus i pada rangkaian.

Jawab :

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \quad \longrightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i + \frac{1}{LC}\int i\,dt = \frac{V}{L}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{10}{1}.i + \frac{1}{(1).(0{,}04)}\int i\,dt = \frac{10}{1} \quad \longrightarrow \quad \frac{di}{dt} + 10.i + 25\int i\,dt = 10$$

$$\frac{d^2 i}{d^2 t} + 10.\frac{di}{dt} + 25.i = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2}{d^2 t} + 10.\frac{d}{dt} + 25\right)i = 0$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$

$$\left(s^2 + 10.s + 25\right)i = 0 \quad \rightarrow \quad \left(s^2 + 10.s + 25\right) = 0$$

Sehingga didapat :

$$s_1 = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4(1.25)}}{2} = -5 \quad \text{dan} \quad s_2 = \frac{-10 - \sqrt{10^2 - 4(1.25)}}{2} = -5$$

terlihat bahwa : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{10}{2.1}\right)^2 = 25$ dan $\frac{1}{LC} = \frac{1}{(1).(0,04)} = 25$

maka : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ atau $R^2 = \frac{4L}{C}$

sehingga bentuk umum penyelesaian persamaan ini adalah :

$$i = \varepsilon^{\alpha t}\left(K_1 + K_2 t\right)$$

dimana : $\alpha = -\dfrac{R}{2L} = -\dfrac{10}{2} = -5$ sehingga : $i = \varepsilon^{-5t}\left(K_1 + K_2 t\right)$

karena sifat L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0

arus : $i(0+) = 0$

$$\underbrace{i(0+)}_{\downarrow\ 0} = \varepsilon^{-5.0}\left(K_1 + K_2.0\right) \longrightarrow K_1 = 0$$

Di dapat : $i = \varepsilon^{-5t}.K_2 t$

demikian juga dengan C yang tidak dapat berubah dengan seketika,

maka tegangan pada C pada t = 0+ : $\dfrac{1}{C}\int i(0+)\,dt = 0$

$$L\frac{di}{dt}(0+) + R.\underbrace{i(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(0+)\,dt}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = V \longrightarrow \frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = 10 \ {}^{Amp}/_{det}$$

bila Persamaan umum arus dideferensialkan satu kali, maka :

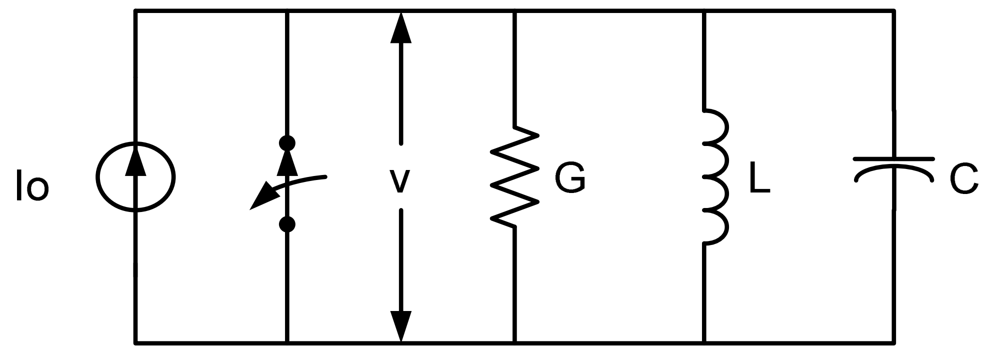
$$\frac{di}{dt}(0+) = -5.\varepsilon^{-5t}K_2 t + K_2.\varepsilon^{-5t} \longrightarrow \underbrace{\frac{di}{dt}(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 10}} = -5.\varepsilon^{-5.0}K_2.0 + K_2.\varepsilon^{-5.0}$$

maka diperoleh $K_2 = 10$

Sehingga di dapat persamaan arus pada rangkaian :

$$\underline{i = 10\,t.\varepsilon^{-5t} \quad Amp}$$

4.3 Response Rangkaian Paralel RLC Dengan Sumber Searah



Gambar 4.5 Rangkaian paralel RLC dengan sumber searah

Bila saklar terbuka, maka menurut hukum arus Kirchhoff dapat dituliskan :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io$$

dideferensialkan satu kali :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{G}{C}\frac{d}{dt}+\frac{1}{LC}\right).v=0$$

bilamana : $\frac{d}{dt}=s$, maka : $\left(s^2+\frac{G}{C}s+\frac{1}{LC}\right).v=0$

didapat : $s_1=\frac{-G}{2C}+\frac{1}{2C}\sqrt{G^2-\frac{4C}{L}}$ dan $s_2=\frac{-G}{2C}-\frac{1}{2C}\sqrt{G^2-\frac{4C}{L}}$

misalkan : $\alpha=\frac{-G}{2C}$ dan $\beta=\frac{1}{2C}\sqrt{G^2-\frac{4C}{L}}$

sehingga : $s_1=(\alpha+\beta)$ dan $s_2=(\alpha-\beta)$

sehingga Persamaan karakteristik nya dapat menjadi :

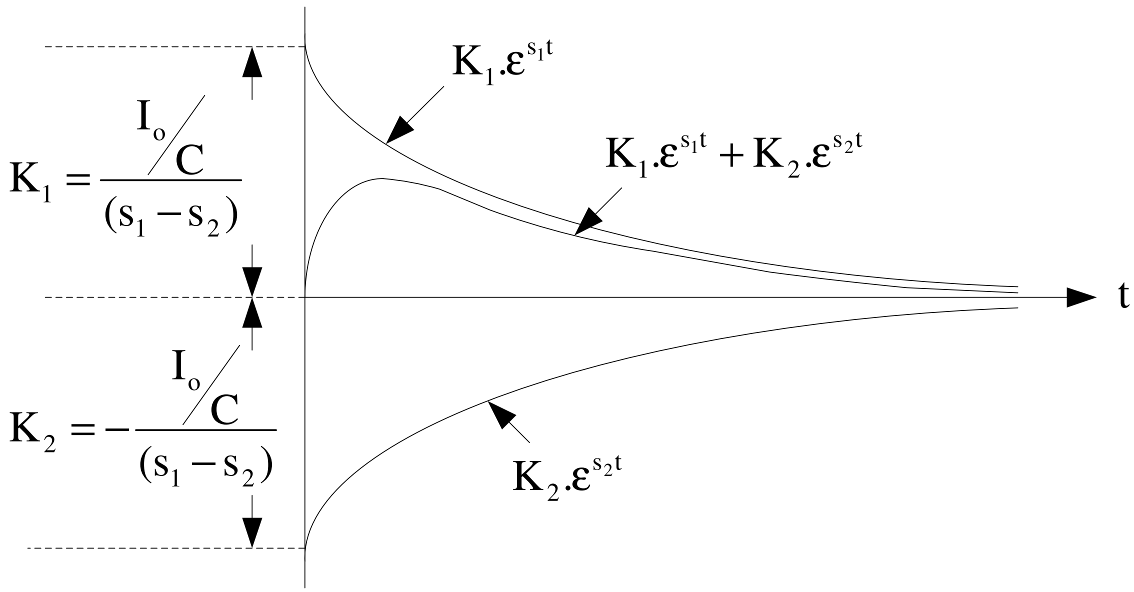
$$[s-(\alpha+\beta)][s-(\alpha-\beta)].v=0$$

terlihat bahwa harga β bisa potitif; nol dan imaginer / negatif,

Kemunkinan I : $G^2 > \dfrac{4C}{L} \rightarrow$ **harga β adalah positif dimana s_1 dan s_2 nyata.**

Persamaan tegangan v pada rangkaian Gambar 4.5 bilamana saklar dibuka pada t = 0 adalah :

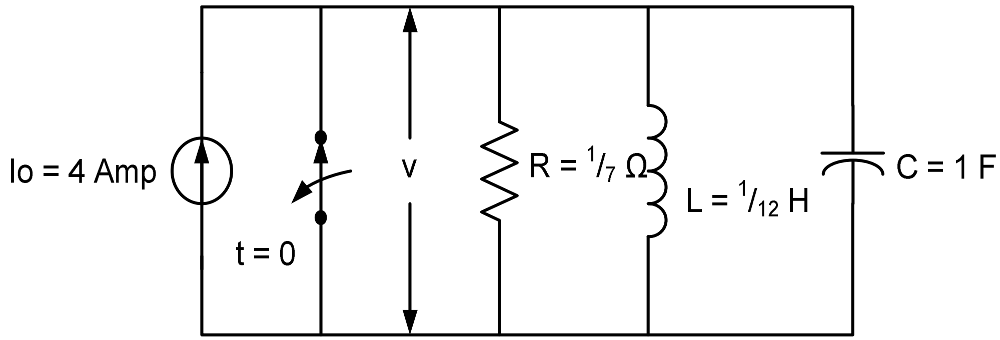
$$v = \frac{Io/C}{(s_1 - s_2)}\left(\varepsilon^{s_1 t} + \varepsilon^{s_2 t}\right)$$



Gambar 4.6 Kurva tegangan pada rangkaian paralel RLC dengan input searah pada kondisi $G^2 > \dfrac{4C}{L}$

Contoh :

Perhatikan rangkaian ini :



dengan mengabaikan semua kondisi awal elemen pasif, maka pada t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan tegangan v, dan berapa besar tegangan v setelah saklar dibuka selama 0,1 detik.

Jawab :

Persamaan arus pada rangkaian setelah saklar dibuka adalah :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + 7.v + 12\int v\,dt = 4$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+7\frac{dv}{dt}+12v=0 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dt^2}+7\frac{d}{dt}+12\right).v=0$$

misalkan : $\frac{d}{dt}=s$

maka : $(s^2+7s+12).v=0$ atau : $s^2+7s+12=0$

akar-akar persamaan ini adalah :

$$s_1=\frac{-7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7^2-4.1.12}=-3 \quad \text{dan} \quad s_2=\frac{-7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7^2-4.1.12}=-4$$

selanjutnya:

$$G^2=(7)^2=49 \quad \text{dan} \quad \frac{4C}{L}=\frac{4.1}{(1/12)}=12$$

maka : $G^2>\frac{4C}{L}$

sehingga bentuk umum penyelesaian Persamaan adalah :

$$v=K_1.\varepsilon^{s_1t}+K_2.\varepsilon^{s_2t}$$

sehingga Persamaan menjadi :

$$v = K_1.\varepsilon^{-3t} + K_2.\varepsilon^{-4t}$$

Karena :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} = K_1.\varepsilon^{-3.0} + K_2.\varepsilon^{-4.0}$$

maka : $K_1 + K_2 = 0$

Karena :

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\downarrow \atop 0} = Io \longrightarrow \frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} = \frac{10}{1} = 10 \ \text{volt/det}$$

Jika persamaan tegangan dideferensialkan satu kali, didapat :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow \atop 10} = -3.K_1.\varepsilon^{-3.0} - 4K_2.\varepsilon^{-4.0}$$

maka : $-3K_1 - 4K_2 = 10$

Maka didapat : $K_1 = 10$ dan $K_2 = -10$

bilamana harga K_1 dan K_2 ini disubstitusikan kedalam Persamaan,

maka didapat bentuk persamaan tegangan v bilamana saklar dibuka

pada t = 0 adalah :

$$v = 10\left(\varepsilon^{-3.t} - \varepsilon^{-4t}\right) \quad \text{volt}$$

sedangkan besar tegangan v setelah saklar dibuka selama 0,1 detik

adalah :

$$\underline{v_{(0{,}1\,\text{det})} = 10\left[\varepsilon^{-3.(0{,}1)} - \varepsilon^{-4(0{,}1)}\right] = 0{,}705 \quad \text{volt}}$$

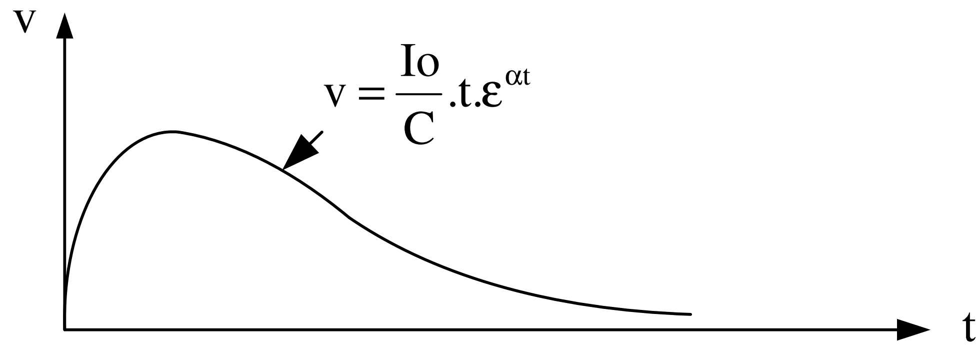
Kemungkinan II : $G^2 = \dfrac{4C}{L} \rightarrow$ **dimana β adalah nol dan $s_1 = s_2$**

persamaan tegangan v pada rangkaian Gambar 4.5, untuk kondisi

$G^2 = \dfrac{4C}{L}$ sebagai berikut :

$$v = \frac{Io}{C}.t.\varepsilon^{\alpha t}$$

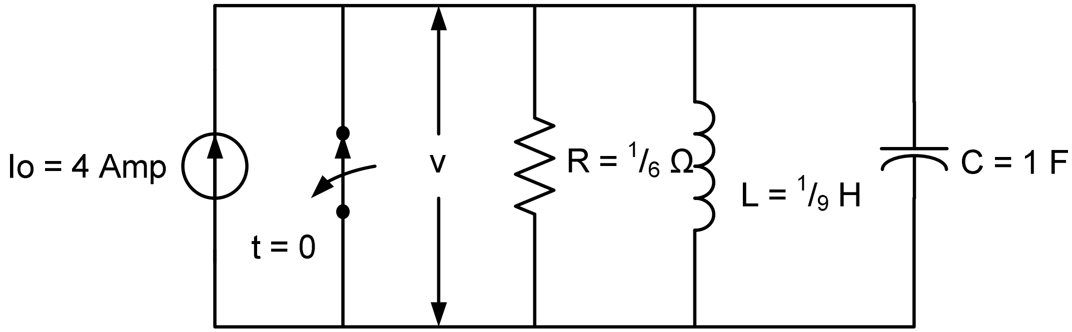
dengan : $\alpha = \dfrac{-G}{2C}$



Gambar 4.7 Kurva arus pada rangkaian paralel RLC dengan input arus searah pada kondisi $G^2 = \dfrac{4C}{L}$

Contoh :

Perhatikan rangkaian berikut ini :



dengan mengabaikan semua kondisi awal dari elemen pasif, maka pada saat t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan tegangan v dan berapa besar v setelah saklar terbuka selama 0,1 detik.

Jawab :

Adapun persamaan arus pada rangkaian setelah saklar dibuka ialah :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \quad \longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + 6.v + 9\int v\,dt = 4$$

bila dideferensialkan satu kali, maka diperoleh : $\dfrac{d^2v}{dt^2} + 6\dfrac{dv}{dt} + 9\,v = 0$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$

maka : $\left(s^2 + 6s + 9\right).v = 0$ atau : $s^2 + 6s + 9 = 0$

akar-akar persamaan ini adalah :

$s_1 = \frac{-6}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6^2 - 4.1.9} = -3$ dan $s_2 = \frac{-6}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6^2 - 4.1.9} = -3$

terlihat bahwa :

$G^2 = (6)^2 = 36$ dan $\frac{4C}{L} = \frac{4.1}{(1/9)} = 36$

maka : $G^2 = \frac{4C}{L}$, sehingga bentuk umum penyelesaian Persamaan :

$$v = K_1.\varepsilon^{\alpha t} + K_2.t.\varepsilon^{\alpha t}$$

dengan $\alpha = \frac{-G}{2C} = \frac{-(6)}{2.1} = -3 \longrightarrow v = K_1.\varepsilon^{-3t} + K_2.t.\varepsilon^{-3t}$

Apabila saklar dibuka pada saat t = 0, maka :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} = K_1.\varepsilon^{-3.0} + K_2.0.\varepsilon^{-4.0} \longrightarrow K_1 = 0$$

Dari :

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\downarrow \atop 0} = Io \longrightarrow \frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} = \frac{4}{1} = 4 \ \text{volt}/\text{det}$$

Maka :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow \atop 4} = -3.\underbrace{K_1}_{\downarrow \atop 0}.\varepsilon^{-3.0} + K_2.\varepsilon^{-3.0} - 3K_2.\varepsilon^{-3.0} \longrightarrow K_2 = 4$$

Sehingga diperoleh bentuk persamaan tegangan v pada rangkaian untuk kondisi $G^2 = \frac{4C}{L}$ adalah : $\underline{v = 4.t.\varepsilon^{-3.t} \quad \text{volt}}$

Setelah saklar dibuka selama 0,1 detik, maka besar tegangan V adalah :

$$\underline{v_{(0,1\,det)} = 4.(0,1).\varepsilon^{-3.0,1} = 0,296 \quad \text{volt}}$$

Kemungkinan III : $G^2 < \frac{4C}{L} \rightarrow$ **harga β adalah negatif dimana s_1 dan s_2 kompleks**

Dalam keadaan ini $\beta = \sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}$, sedangkan $\alpha = \frac{-G}{2C}$

maka akar-akar merupakan bilangan kompleks :

$$s_1 = (\alpha + j\beta) \quad \text{dan} \quad s_2 = (\alpha - j\beta)$$

maka diperoleh persamaan tegangan v pada rangkaian Gambar 4.5,

untuk kondisi $G^2 < \frac{4C}{L}$:

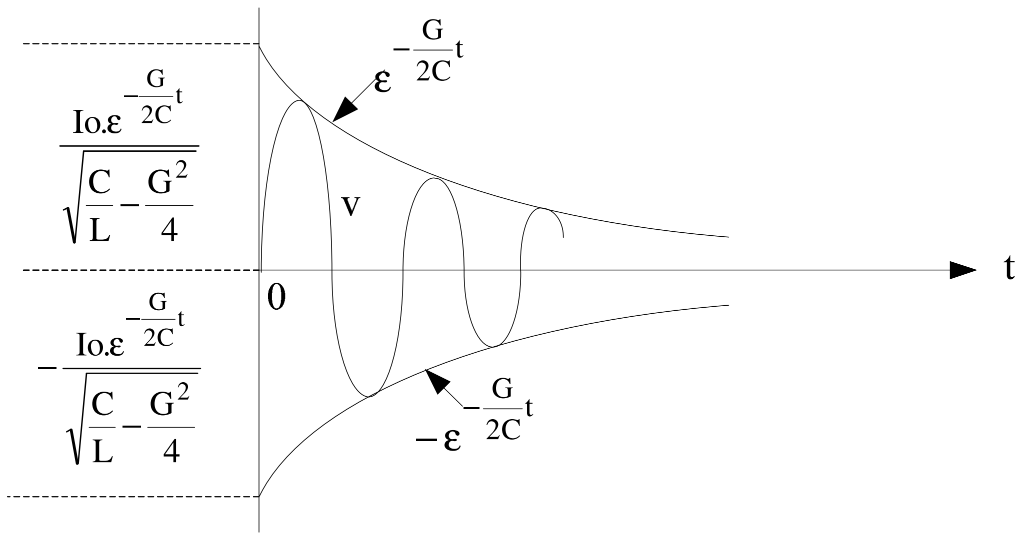
$$v = \frac{Io.\varepsilon^{-\frac{G}{2C}t}}{\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{G^2}{4}}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}}\right)t$$

terlihat v merupakan osilasi tegangan berbentuk sinus yang

amplitudonya tidak konstan dan menurun secara eksponensial

dengan konstanta waktu $\frac{2C}{G}$ dengan frekuensi ayunan (*angular frequency*) :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}} \ \text{rad/det}$$

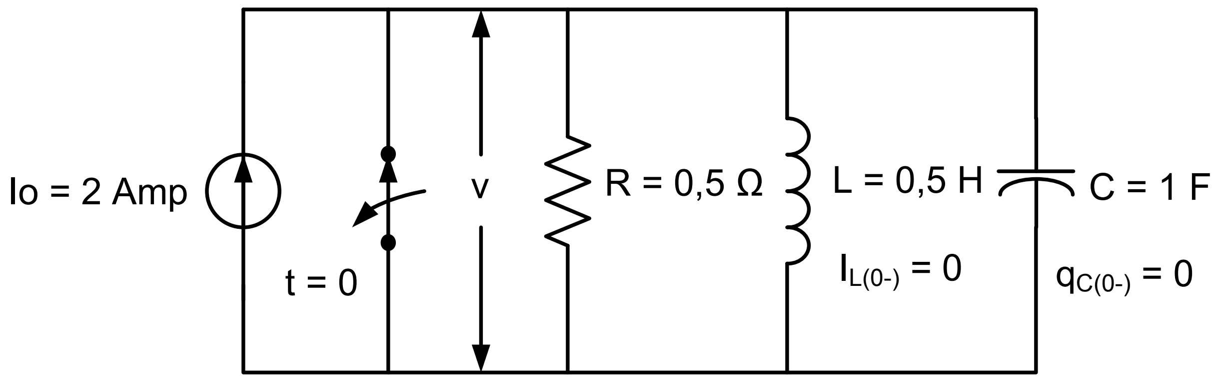


Gambar 4.8 Kurva tegangan pada rangkaian paralel RLC dengan input arus searah

pada kondisi $G^2 < \frac{4C}{L}$

Contoh :

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



pada saat t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan tegangan v pada rangkaian.

Jawab :

Adapun persamaan arus pada rangkaian setelah saklar dibuka ialah :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2.v = 0$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$ maka :

$$\left(s^2 + 2s + 2\right).v = 0 \quad \longrightarrow \quad s^2 + 2s + 2 = 0$$

adapun akar-akar persamaan adalah :

$$s_1 = -\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - 4.2.1} = -1 + j1$$ dan $$s_2 = -\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - 4.2.1} = -1 - j1$$

dari rangkaian terlihat bahwa :

$$G^2 = \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2 = 4$$ dan $$\frac{4C}{L} = \frac{4.1}{0{,}5} = 8$$

sehingga ternyata bahwa : $G^2 < \dfrac{4C}{L}$

maka bentuk umum penyelesaian Persamaan adalah :

$$v = K_1.\varepsilon^{(-1+j1)t} + K_2.\varepsilon^{(-1-j1)t} \longrightarrow v = \varepsilon^{-t}\left(K_1.\varepsilon^{jt} + K_2.\varepsilon^{-jt}\right)$$

karena :

$$\varepsilon^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t$$ dan $$\varepsilon^{-j\beta t} = \cos\beta t - j\sin\beta t$$

$$v = \varepsilon^{-t}\left[(K_1 + K_2).\cos t + (jK_1 - jK_2).\sin t\right] \longrightarrow v = \varepsilon^{-t}(K_3.\cos t + K_4.\sin t)$$

untuk t = 0

$$\underbrace{v(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \varepsilon^{-0}\left(K_3.\cos 0 + K_4.\sin 0\right) \longrightarrow K_3 = 0$$

Dari :

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = Io \longrightarrow \frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} = \frac{2}{1} = 2 \text{ volt/det}$$

Maka :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 2}} = -\varepsilon^{-0}.K_4\left(\cos 0 - \sin 0\right) \longrightarrow K_4 = 2$$

dan bilamana harga-harga K_3 dan K_4 disubstitusikan kedalam Persamaan maka diperoleh bentuk persamaan tegangan v bilamana saklar dibuka pada saat t = 0 adalah :

$$\underline{v = 2\varepsilon^{-t}\sin t}$$