BAB 2
RESPONS FUNGSI STEP PADA RANGKAIAN RL DAN RC

Oleh :

Ir. A.Rachman Hasibuan dan

Naemah Mubarakah, ST

2.1 Persamaan Diferensial Orde Satu

Adapun bentuk yang sederhana dari suatu persamaan diferensial orde satu adalah:

$$a_0 \frac{di}{dt} + a_1 . i = 0$$

sehingga dapat dikatakan bahwa besarnya orde dari suatu persamaan diferensial dinyatakan oleh turunan yang tertinggi pada suatu persamaan diferensial dan secara umum dapat dituliskan dengan :

$$a_0 \frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{di}{dt} + a_n i = C$$

Persamaan diferensial Linear dan Non Linear

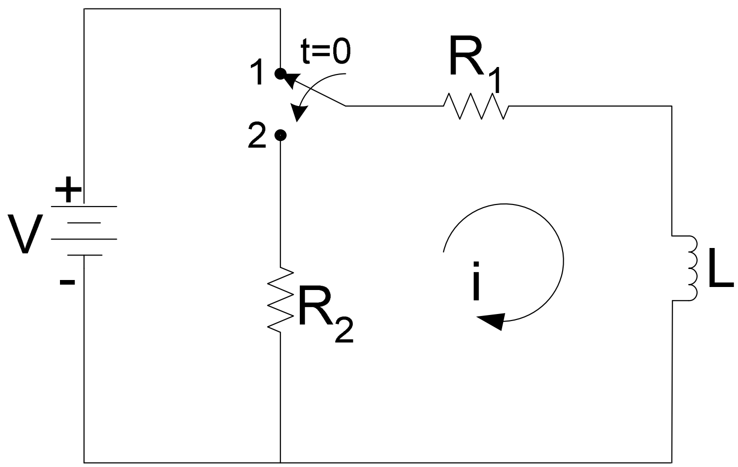
Suatu persamaan diferensial dikatakan linear apabila variabel dependent dan semua turunannya adalah ber-orde satu, dan yang lainnya dikatakan non linear.

Persamaan diferensial biasa (ordinary)

Suatu persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial biasa kalau hanya mengandung turunan total (total derivatives) dan sebaliknya kalau persamaan diferensial tersebut juga mengandung turunan parsial maka persamaan diferensial tersebut dikatakan persamaan diferensial parsial.

2.2 Persamaan Diferensial Homogen

Misalkan seperti rangkaian dibawah ini :



Gambar 2.1. Rangkaian RL dengan sumber tegangan V

Setelah pada t = 0, maka dari rangkaian dapat dituliskan persamaan tegangan Kirchoff sebagai berikut :

$$L\frac{di}{dt} + \left(R_1 + R_2\right).i = 0$$

Persamaan ini memperlihatkan persamaan diferensial linear orde satu yang homogen dengan koefisien konstan. Persamaan ini dapat dinyatakan dengan bentuk

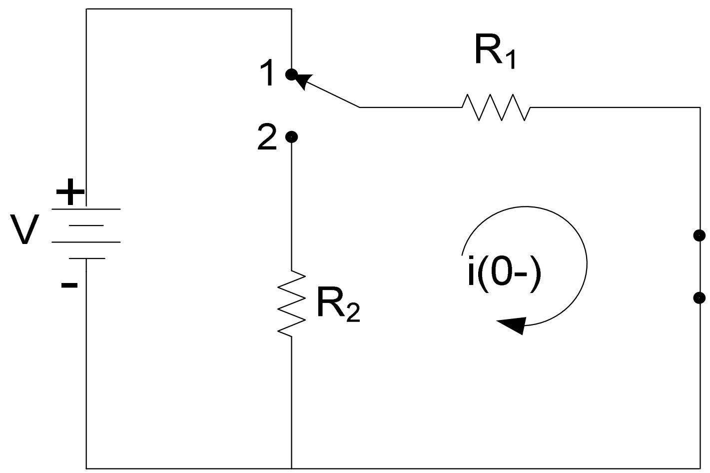
$$\frac{di}{i} = -\frac{\left(R_1 + R_2\right)}{L}.dt$$

Jika diturunkan persamaan tersebut, akan di dapat :

$$i = k\varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}t}$$

dimana : Req = R1 + R2

Konstanta k dapat dihitung dengan menggunakan kondisi awal dari rangkaian yaitu kondisi pada saat t = 0-.



Gambar 2.2 Rangkaian ekivalen dari Gambar 2.1. pada saat t = 0

Maka persamaan menjadi : $$i(0) = \frac{V}{R_1} = k.\varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}(0)}$$

Sehingga : $$i = \frac{V}{R_1}\varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}t}$$

2.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Homogen Dengan Faktor Integrasi

Dimisalkan persamaan diferensial yang tidak homogen : $\frac{di}{dt} + Pi = Q$

Dimana P adalah konstanta dan Q merupakan fungsi independent ataupun konstanta.

$$\frac{di}{dt}\varepsilon^{Pt} + Pi.\varepsilon^{Pt} = Q.\varepsilon^{Pt}$$

Atau :

$$i = \varepsilon^{-Pt}\int Q.\varepsilon^{Pt}.dt + \varepsilon^{-Pt}K$$

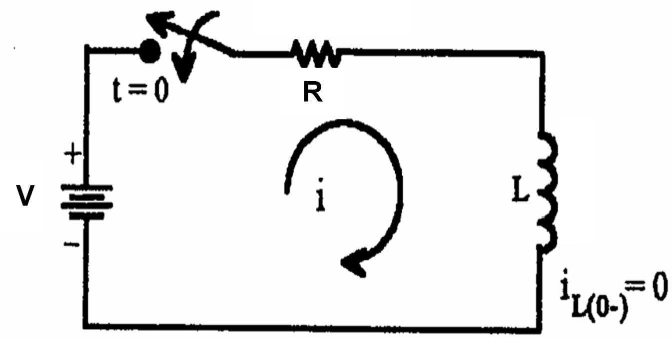
$\varepsilon^{-Pt}\int Q.\varepsilon^{Pt}.dt$: disebut sebagai integral partikular

$\varepsilon^{-Pt}K$: disebut sebagai fungsi komplementer

Sehingga : $i = i_{ss} + i_{tr}$

2.4 Respon Dari Rangkaian Seri RL Dengan Sumber Tegangan Searah/Unit Step

Perhatikan rangkaian dibawah ini :



Gambar 2.3 Rangkaian RL dengan sumber tegangan searah

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V$$

Penurunan rumus untuk mencari besar arus I pada rangkaian :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V$$

$$\frac{di}{\left(i - \frac{V}{R}\right)} = -\frac{R}{L}dt$$

$$Ln\left(i - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + K'$$

$$i - \frac{V}{R} = \varepsilon^{\left(-\frac{R}{L}t + K'\right)} = \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \cdot \varepsilon^{K'}$$

$$i = K.\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

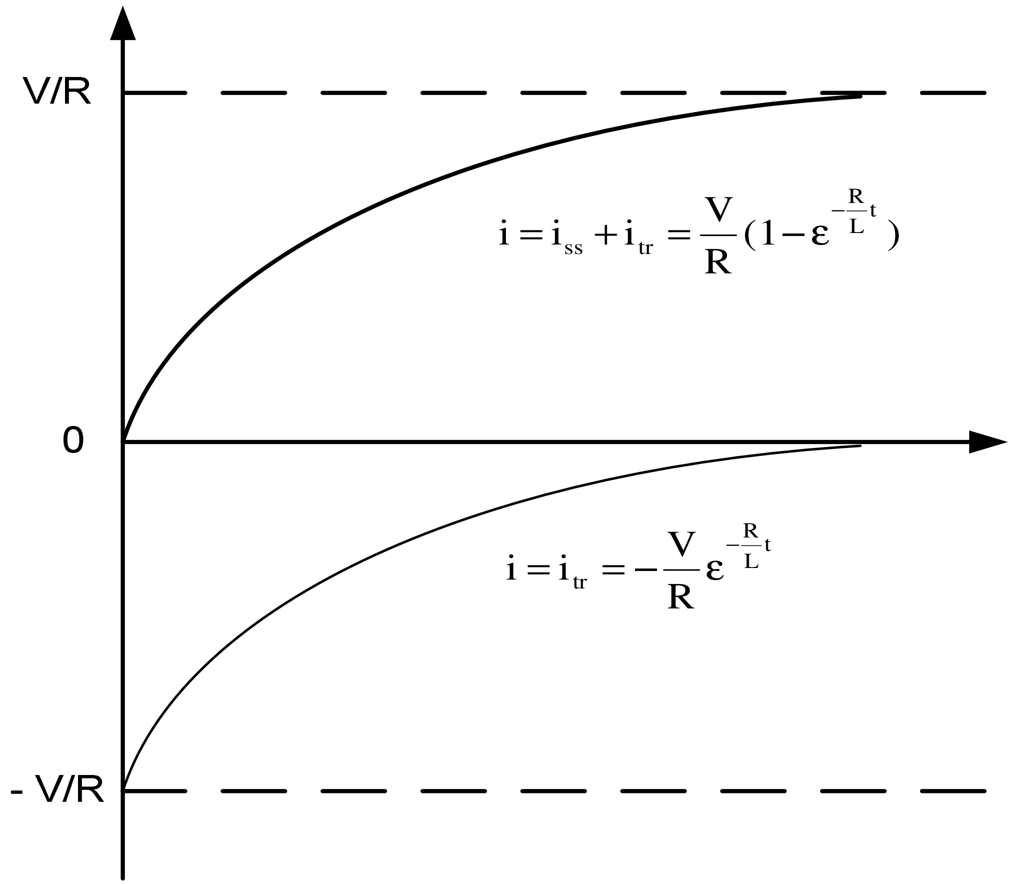
2.4.1 Menentukan Konstanta K

Karena rangkaian pada Gambar 2.3, disaat t = 0 arus yang mengalir pada rangkaian adalah nol dan pada saat saklar ditutup (t = 0), komponen L bersifat terbuka, maka pada saat saklar ditutup arus pada rangkaian adalah nol, sehingga pada t=0 :

$$i = 0 = K\varepsilon^{-\frac{R}{L}.0} + \frac{V}{R}$$ Atau : $K = -\frac{V}{R}$

Sehingga :

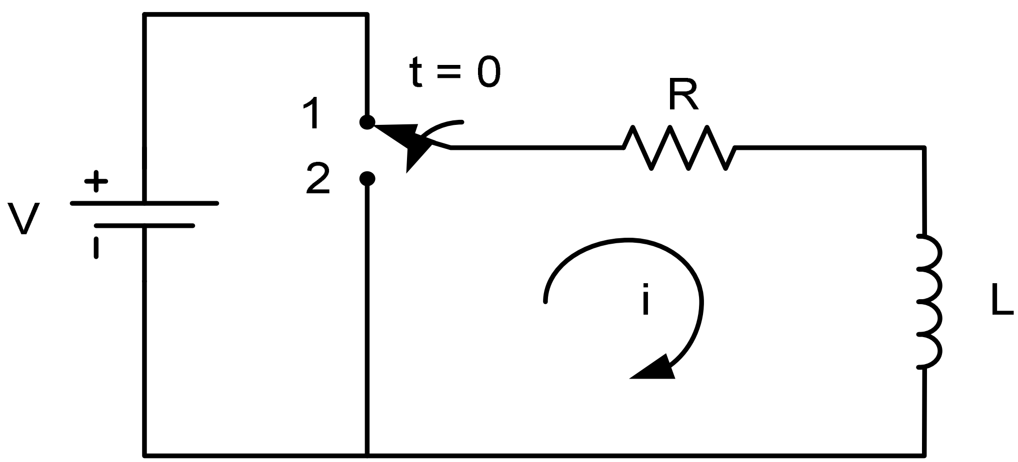
$$i = \underbrace{\frac{V}{R}}_{i_{SS}} + \underbrace{\left(-\frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)}_{i_{tr}}$$



Gambar 2.4 Kurva dari Persamaan (2.21)

2.4.2 Konstanta Waktu (Time Constant)

Rangkaian dibawah ini sudah dalam keadaan steady state dan pada saat t = 0 saklar digeser keposisi 2 :



Gambar 2.5 Rangkaian RL dengan sumber tegangan V

Sebelum saklar dipindahkan ke posisi 2 pada rangkaian telah mengalir arus sebesar :

$$I_{(0-)} = \frac{V}{R} = I_0$$

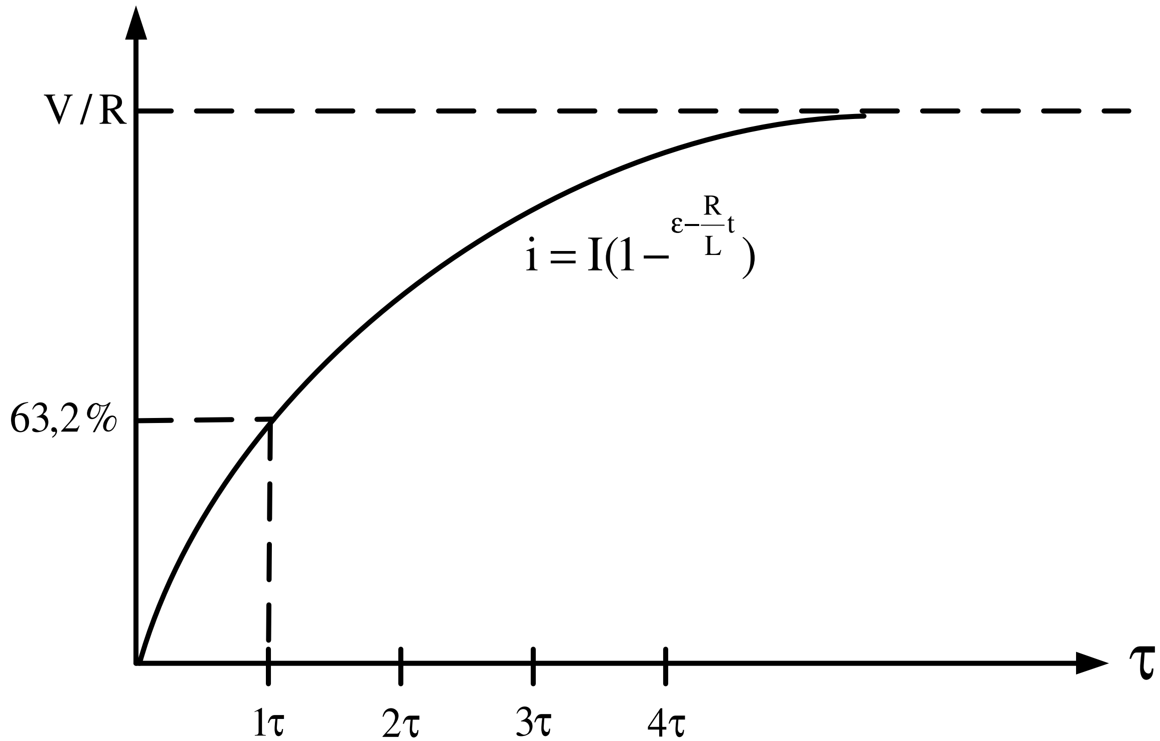
Dan setelah saklar di posisi 2 maka persamaan arus pada rangkaian adalah :

$$i = \frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{Atau :} \qquad i = I_0\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

misalkan : $\tau = \frac{L}{R}$ maka : $\frac{i}{I_0} = \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$

Dan seandainya untuk rangkaian pada Gambar 2.1 untuk satu konstanta waktu setelah saklar ditutup adalah sebesar:

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad \text{atau:} \qquad i = I\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



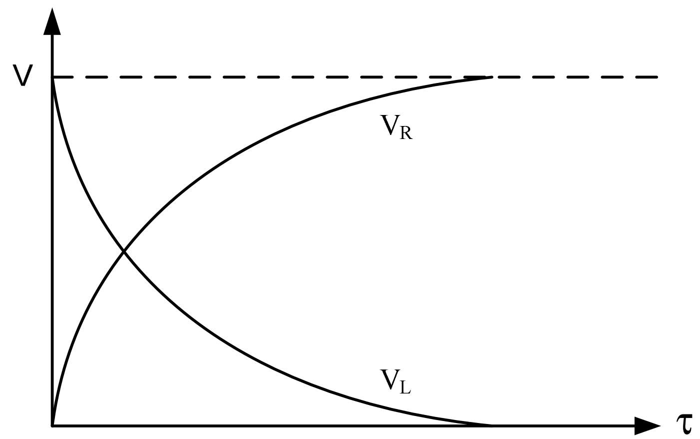
Gambar 2.6 Kurva arus dalam satu konstanta waktu dari Persamaan (2.20)

2.4.3 Tegangan Transient Pada R dan L

Pada R: $v_R = R.i = R.\frac{V}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$ atau: $v_R = V\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Pada L: $v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[\frac{V}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)\right]$ atau: $v_L = V\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$

$$V = v_R + v_L = V(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}) + V\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = V$$



Gambar 2.7 Kurva V_R dan V_L sebagai fungsi τ

2.4.4 Daya Sesaat

Pada R:

$$p_R = v_R . i = V\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)\times\frac{V}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

atau:

$$p_R = \frac{V^2}{R}\left(1-2\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}+\varepsilon^{-2\frac{R}{L}t}\right)$$

Pada L:

$$p_L = v_L i = V\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\times\frac{V}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

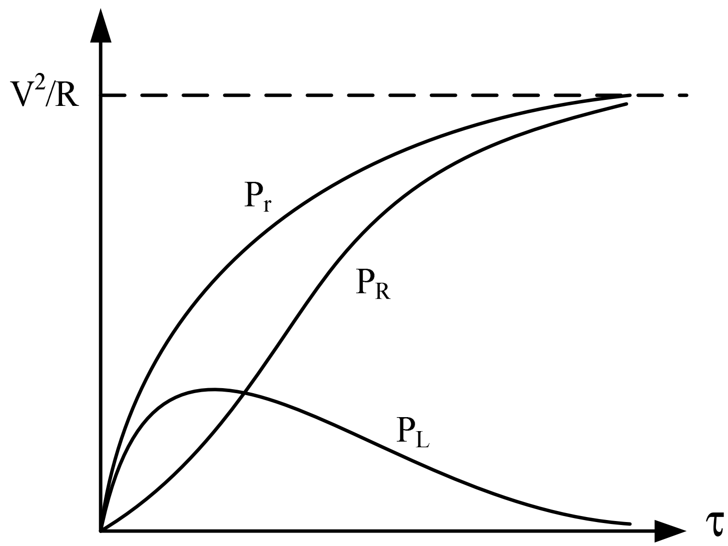
atau:

$$p_L = \frac{V^2}{R}\left(\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}-\varepsilon^{-2\frac{R}{L}t}\right)$$

Sedangkan total daya :

$$p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

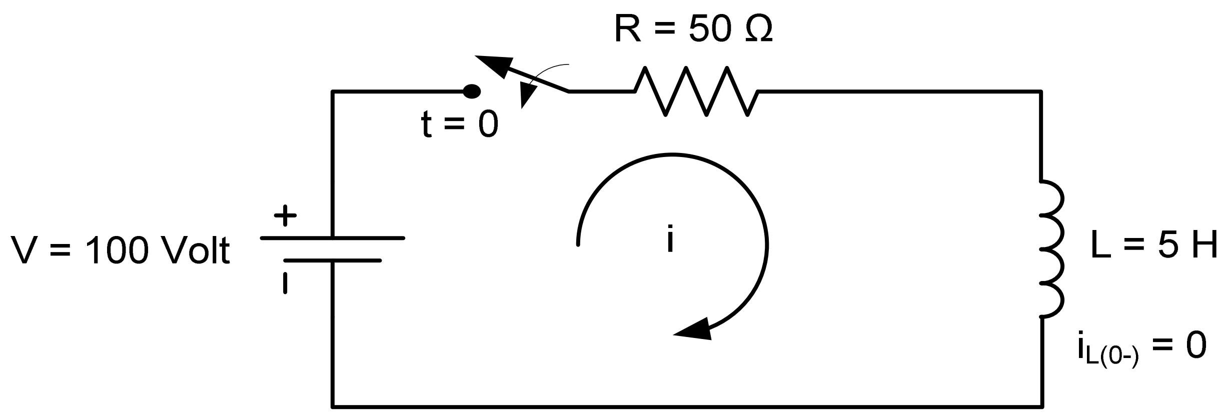
$$W = \frac{V^2}{2R}\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}I^2L$$



Gambar 2.8 Kurva P_R, P_L dan P_r

Contoh:

Perhatikan rangkaian dibawah ini:



Carilah:

a. Bentuk persamaan arus setelah saklar ditutup.
b. Bentuk persamaan tegangan pada R dan L setelah saklar ditutup.
c. Berapa besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama 0,5 det.
d. Berapa besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama satu konsatanta waktu rangkaian.

Jawab:

Setelah saklar ditutup, maka persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V \qquad \text{atau:} \qquad 50.i + 5\frac{di}{dt} = 100$$

$$\frac{di}{(i-2)} = -10\frac{di}{dt} \qquad \text{atau:} \qquad i = K.\varepsilon^{-10t}+2 \qquad \text{(a)}$$

karena sifat dari L yang tidak dapat disubtitusikan ke Persamaan (a), diperolehlah bentuk persamaan arus yang mengalir pada rangkaian setelah saklar ditutup.

a. $i = 2\left(1-\varepsilon^{-10t}\right)\text{Amp}$

b. Bentuk persamaan tegangan di R setelah saklar ditutup adalah:

$$v_R = R.i = R.\left[2\left(1-\varepsilon^{-10t}\right)\right] = 50\left[2\left(1-\varepsilon^{-10t}\right)\right]$$

$$\underline{v_R = 100(1-\varepsilon^{-10t})\ \text{volt}}$$

Bentuk persamaan tegangan di L setelah saklar ditutup adalah :

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 5\frac{d}{dt}\left\lfloor 2(1-\varepsilon^{-10t})\right\rfloor = 5(20\varepsilon^{-10t})$$

$$\underline{v_L = 100.\varepsilon^{-10t}\ \text{volt}}$$

c. Besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama 0,5 detik adalah:

$i(0{,}5\ \text{det}) = 2(1-\varepsilon^{-10.0,5})$ atau: $\underline{i_{(0,5\,\text{det})} = 1{,}98\ \text{Amp}}$

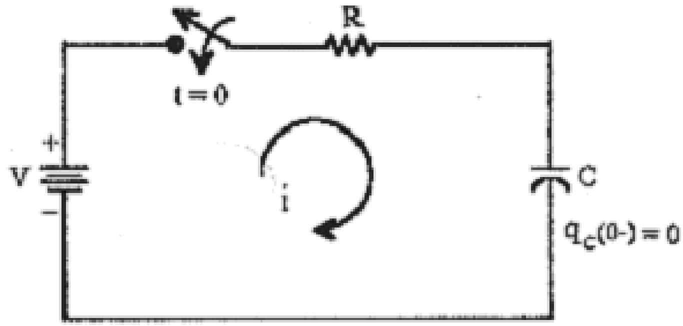
d. Besar arus selama 1 konstanta waktu setelah saklar ditutup :

$$\tau = \frac{1}{10} = 0{,}1.\text{det}.$$

$i(\tau=0{,}1.\text{det}) = 2(1-\varepsilon^{-10.0,1})$ atau: $i(\tau=0{,}1.\text{det}) = 1{,}26.\text{Amp}.$

2.5 Respons Dari Rangkaian Seri RC Dengan Sumber Tegangan Searah/Unit Step

Pada saat t = 0 saklar pada rangkaian dibawah ini ditutup.



Gambar 2.9 Rangkaian RC seri dengan sumber searah

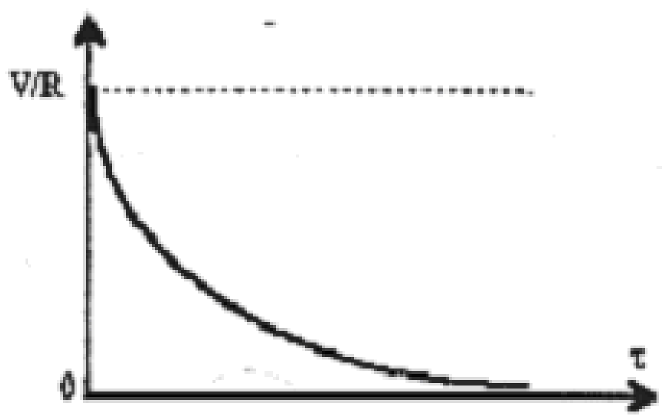
$$R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$$

Penyelesaian umum (*general solution*) dari Persamaan di atas :

$$i = K\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

2.5.1 Menentukan Konstanta K

$$K = i_0 = \frac{V}{R} \quad \rightarrow \quad i = \frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$$

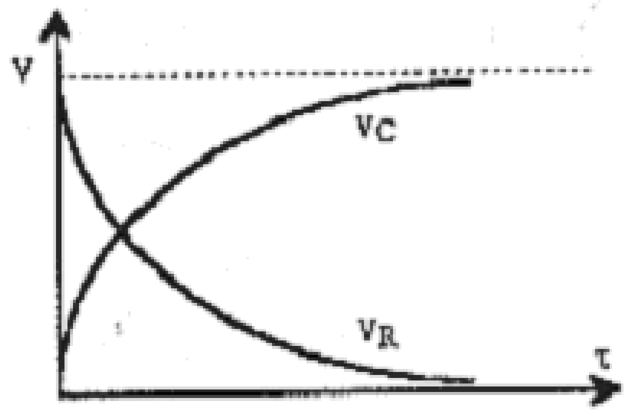


Gambar 2.10 Kurva arus dari Persamaan (2.36)

2.5.2 Tegangan Transient Pada R dan C

Pada R : $$V_R = R.i = R.\left[\frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$ atau : $$V_R = V.\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pada C : $$V_C = V\left[1-\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$



Gambar 2.11 Kurva V_R dan V_C

2.5.3 Daya Sesaat

Pada R :

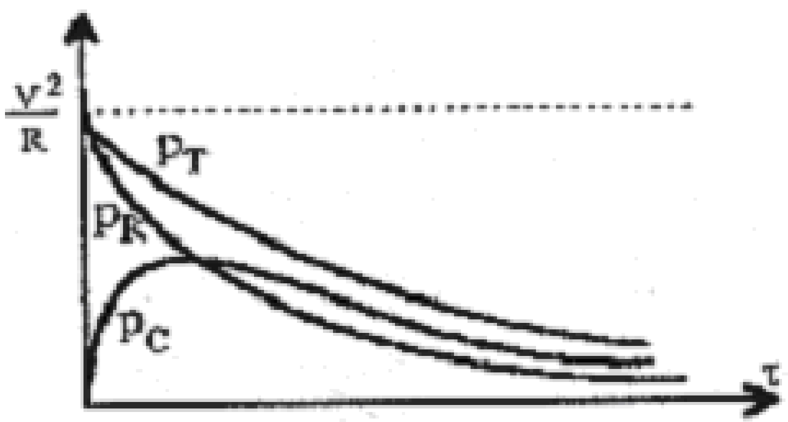
$$p_R = V_R . i = \left[V.\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] \left[\frac{V}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \frac{V^2}{R} \varepsilon^{-2\frac{t}{\tau}}$$

Pada C :

$$p_C = V_C . i = V \left[1 - \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] \left[\frac{V}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \frac{V^2}{R} \left[\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} - \varepsilon^{-2\frac{t}{\tau}} \right]$$

dan :

$$p_T = p_R + p_C = \frac{V^2}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$$



Gambar 2.12 Kurva P_R, P_C dan P_r

2.6 Transient Dari Muatan q Pada Rangkaian RC Seri

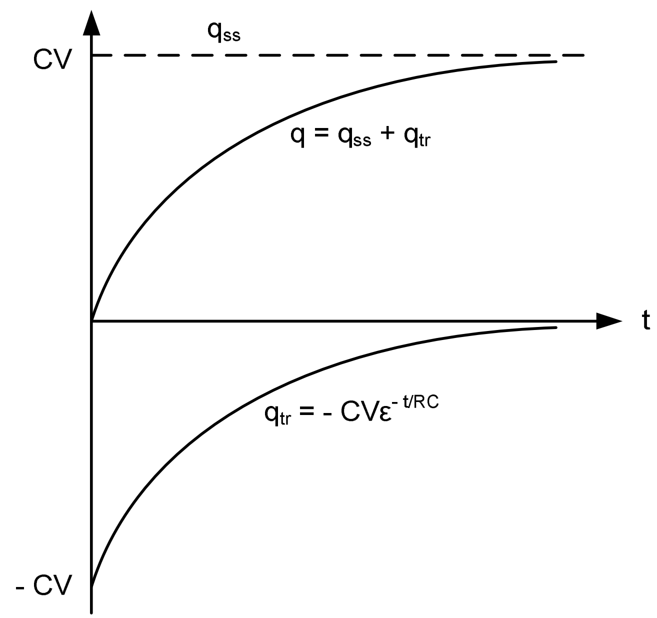
$$R.i + \frac{1}{C}\int i dt = V \quad \longrightarrow \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = K\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t} + CV \quad \longrightarrow \quad q = CV\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$q = q_{ss} + q_{tr}$

dimana : $q_{ss} = CV$

$$q_{tr} = -CV\varepsilon^{-\frac{1}{RC}}$$



Gambar 2.13 Kurva muatan transient RC seri