BAB 2

RESPONS FUNGSI STEP PADA RANGKAIAN RL DAN RC

2.1 Persamaan Diferensial Orde Satu

Adapun bentuk yang sederhana dari suatu persamaan diferensial orde satu adalah:

$$a_0 \frac{di}{dt} + a_1.i = 0 \tag{2.1}$$

dimana a_o dan a_1 konstanta.

Persamaan (2.1) ini disebut sebagai orde satu karena turunan/derivative persamaan ini yang paling tinggi adalah turunan pertama $\left[\frac{di}{dt}\right]$, sehingga dapat dikatakan bahwa besarnya orde dari suatu persamaan diferensial dinyatakan oleh turunan yang tertinggi pada suatu persamaan diferensial dan secara umum dapat dituliskan dengan :

$$a_0 \frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{di}{dt} + a_n i = C \tag{2.2}$$

sehingga Persamaan (2.2) disebut persamaan diferensial orde “n”dengan “t” sebagai variabel independent dan “i” sebagai variabel dependent.

Persamaan diferensial Linear dan Non Linear

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear apabila variabel dependent dan semua turunannya adalah ber-orde satu, dan yang lainnya dikatakan non linear.

Persamaan diferensial biasa (ordinary)

Suatu persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial biasa kalau hanya mengandung turunan total (total derivatives) dan sebaliknya kalau persamaan diferensial tersebut juga mengandung turunan parsial maka persamaan diferensial tersebut dikatakan persamaan diferensial parsial.

2.2 Persamaan Diferensial Homogen

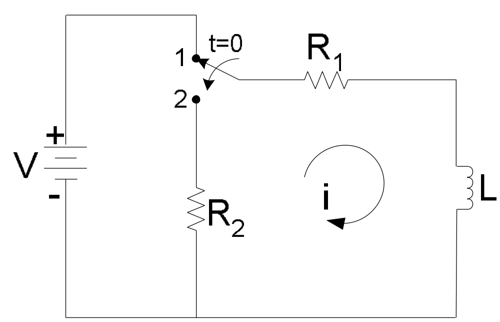
Apabila suatu persamaan diferensial dinyatakan dengan bentuk seperti Persamaan (2.2), maka persamaan diferensial tersebut dikatakan homogen apabila harga dari C adalah nol dan kalau harga C tidak nol maka persamaan diferensial dikatakan tidak homogen.

Dalam rangkaian listrik yang banyak dipergunakan adalah persamaan diferensial biasa dengan koefisien konstan seperti dibawah ini :

$$a_0 \frac{d^n i}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{di}{dt} + a_n i = v(t) \tag{2.3}$$

Dengan v(t) sumber tegangan fungsi waktu yang sering disebut sebagai fungsi pemaksa (*forcing function*), dimana v(t) ini akan menimbulkan respons i yang merupakan variabel dependent.

Misalkan seperti rangkaian dibawah ini :



Gambar 2.1. Rangkaian RL dengan sumber tegangan V

Diasumsikan rangkaian ini telah dalam keadaan steady state dan pada saat t = 0 saklar akan dipindahkan ke posisi 2, dan sebagai objek dalam penganalisaan misalnya untuk mencari arus, tegangan dan lainnya, dimana pengukuran waktu diambil sebagai referensi adalah mulai dari t = 0.

Setelah pada t = 0, maka dari rangkaian dapat dituliskan persamaan tegangan Kirchhoff sebagai berikut :

$$L \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2) i = 0 \tag{2.4}$$

Persamaan ini memperlihatkan persamaan diferensial linear orde satu yang homogen dengan koefisien konstan. Persamaan (29) ini dapat dinyatakan dengan bentuk :

$$\frac{di}{i} = -\frac{(R_1 + R_2)}{L}.dt$$

Selanjutnya bilamana persamaan ini diintegralkan maka diperoleh :

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R_{eq}}{L}\int dt. \longrightarrow \text{dimana : } R_{eq} = R_1 + R_2$$

hasil dari integral ini adalah :

$$Ln(i) = -\frac{R_{eq}}{L}.t + k'$$

atau :

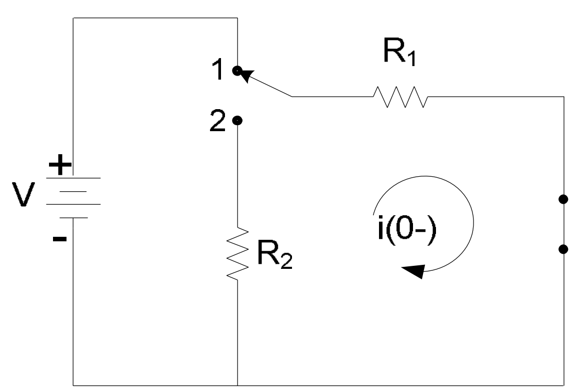
$$i = \varepsilon^{\left(-\frac{R_{eq}}{L}+k'\right)} = \varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}t}.\varepsilon^{k'}$$

Karena : $\varepsilon^{k'} = k$,maka persamaan menjadi :

$$i = k\varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}t} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) ini disebut sebagai bentuk umum dari penyelesaian Persamaan (2.4) karena harga konstanta k telah diketahui dan disubstitusikan ke Persamaan (2.5) maka hasil penyelesaiannya disebut penyelesaian partikular (*particular solution*).

Adapun konstanta k dapat dihitung dengan menggunakan kondisi awal dari rangkaian yaitu kondisi pada saat t = 0-. Adapun rangkaian ekivalen disaat saklar pada posisi 1 ialah :



Gambar 2.2 Rangkaian ekivalen dari Gambar 2.1. pada saat t = 0

Maka dari rangkaian ekivalen terlihat bahwa : i(0-) = V/R_1, dan karena sifat dari L yang tidak bisa berubah dengan seketika, maka arus pada saat saklar dipindahkan keposisi 2, yaitu pada saat t = 0 juga sebesar i(0) = V/R_1 dan apabila Persamaan (2.5) diambil harga t = 0, maka persamaan menjadi :

$$i(0) = \frac{V}{R_1} = k.\varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}(0)}$$

maka diperoleh : $k = \frac{V}{R_1}$,dan apabila harga ini disubstitusikan Persamaan (2.5) akan diperoleh :

$$i = \frac{V}{R_1}\varepsilon^{-\frac{R_{eq}}{L}t} \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) ini disebut sebagai penyelesaian partikular dari Persamaan (2.4).

2.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Homogen Dengan Faktor Integrasi

Dimisalkan persamaan diferensial yang tidak homogen seperti dibawah ini :

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q \tag{2.7}$$

Dimana P adalah konstanta dan Q merupakan fungsi *independent* ataupun konstanta.

Misalkan kalikan ruas kiri dan kanan dari Persamaan (2.7) dengan suatu faktor ε^{Pt} (yang disebut sebagai faktor integrasi), maka akan diperoleh :

$$\frac{di}{dt}\varepsilon^{Pt} + Pi.\varepsilon^{Pt} = Q.\varepsilon^{Pt} \tag{2.8}$$

mengingat : d(x.y) = xdy + ydx, dan misalkan ; x = i. dan y = ε^{Pt}, maka Persamaan (2.8) menjadi :

$$\frac{d}{dt}\left(i.\varepsilon^{Pt}\right) = \varepsilon^{Pt}\frac{di}{dt} + i.P.\varepsilon^{Pt} \tag{2.9}$$

dengan menyamakan Persamaan (2.8) dengan Persamaan (2.9) maka diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\left(i.\varepsilon^{Pt}\right) = Q.\varepsilon^{Pt} \tag{2.10}$$

bilamana Persamaan (2.10) ini diintegralkan, maka akan diperoleh :

$$i\varepsilon^{Pt} = \int Q.\varepsilon^{Pt}.dt + K \tag{2.11}$$

atau:

$$i = \varepsilon^{-Pt} \int Q.\varepsilon^{Pt}.dt + \varepsilon^{-Pt}K \tag{2.12}$$

Bila dilihat ke Persamaan (2.12), harga i terbagi dua :

a). $\varepsilon^{-Pt} \int Q.\varepsilon^{Pt}.dt$: disebut sebagai integral partikular

b). $\varepsilon^{-Pt}K$. : disebut sebagai fungsi komplementer

Terlihat bahwa integral partikular tidak mengandung konstanta sembarang k, sedangkan fungsi komplementer tidak tergantung pada Q.

Pada rangkaian, P berupa konstanta positif yang besarnya tergantung dari komponen pasif, sedangkan Q merupakan fungsi sumber (komponen aktif) rangkaian.

Limit fungsi komplementer untuk $t \to \infty$ harus mencapai nol karena P adalah konstanta positif, sehingga :

$$\lim_{t \to \infty} K\varepsilon^{-Pt} = 0 \tag{2.13}$$

oleh karena itu untuk $t \to \infty$ harga arus i menjadi :

$$i(\infty) = \lim_{t \to \infty} i(t) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon^{-Pt} \int Q\varepsilon^{Pt} dt \tag{2.14}$$

dengan demikian bila dalam limit $t \to \infty$, fungsi komplementer mencapai nol, sedangkan integral partukular tidak mendekati nol, maka harga integral partikular pada saat $t = \infty$ disebut sebagai harga *steady state* dari variabel independent, akan tetapi untuk ini bagian integral partikular tidak boleh mengandung fungsi eksponensial, karena kalau mengandung fungsi eksponensial maka integral ini akan menjadi nol.

Bila dimisalkan penyelesaian Persamaan (2.12) terdiri dari dua bagian, dimana bagian integral partikular dinotasikan dengan i_p sedangkan bagian komplementer dinotasikan dengan i_c maka Persamaan (2.12) ini dapat dinyatakan dengan :

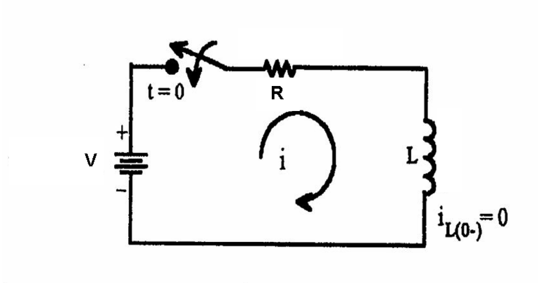
$$i = i_p + i_c \tag{2.15}$$

maka untuk selanjutnya i_p disebut sebagai bagian steady state i_{ss} sedangkan i_c disebut bagian transient i_{tr} sehingga Persamaan (2.15) menjadi :

$$i = i_{ss} + i_{tr} \tag{2.16}$$

2.4 Respon Dari Rangkaian Seri RL Dengan Sumber Tegangan Searah/Unit Step

Perhatikan rangkaian dibawah ini :



Gambar 2.3 Rangkaian RL dengan sumber tegangan searah

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V \tag{2.17}$$

Adapun Persamaan (2.17) ini merupakan persamaan diferensial orde satu, yang dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut :

Persamaan (2.17) ini dapat dibuat dalam bentuk :

$$i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} = \frac{V}{R}$$

atau:

$$\left(i - \frac{V}{R}\right) = -\frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$

atau:

$$\frac{di}{\left(i - \frac{V}{R}\right)} = -\frac{R}{L}dt \tag{2.18}$$

Bilamana Persamaan (2.18) ini dideferensialkan satu kali, maka diperoleh:

$$\int \frac{di}{\left(i - \frac{V}{R}\right)} = -\frac{R}{L}\int dt$$

atau:

$$\text{Ln}\left(i - \frac{V}{R}\right) = -\frac{R}{L}t + K'$$

atau:

$$i-\frac{V}{R}=\varepsilon^{\left(-\frac{R}{L}t+K'\right)}=\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\cdot\varepsilon^{K'}$$

karena:$\varepsilon^{K'}$=K, maka diperoleh :

$$i-\frac{V}{R}=K\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$$

atau:

$$i=K.\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{R} \qquad (2.19)$$

Catatan:

Persamaan (2.19) dapat juga diperoleh dengan cara menggunakan factor integrasi:

Adapun Persamaan (2.17) yang berbentuk:

$$R.i+L\frac{di}{dt}=V$$

Bilamana ruas kiri dan kanan persamaan ini dibagi dengan L maka diperoleh:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{V}{L}$$

Maka disni : $P=\frac{R}{L}$ dan $Q=\frac{V}{L}$, *maka menurut Persamaan (2.12) yang berbentuk :*

$$i=\varepsilon^{-Pt}\int Q\varepsilon^{Pt}dt+\varepsilon^{-Pt}K$$

Dan apabila harga-harga P dan Q disubtitusikan ke persamaan ini, maka diperoleh:

$$i=\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\int\frac{V}{L}\varepsilon^{\frac{R}{L}t}dt+K\varepsilon^{-\frac{R}{L}}$$

atau:

$$i=\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}.\frac{V}{L}\varepsilon^{\frac{R}{L:}t}.\frac{L}{R}+K\varepsilon^{-\frac{R}{L}}$$

atau:

$$i=K\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}+\frac{V}{R}$$

Maka terlihat bahwa persamaan ini identik dengan Persamaan (2.19).

2.4.1 Menentukan Konstanta K

Karena rangkaian (Gambar 2.3), disaat t = 0 arus yang mengalir pada rangkaian adalah nol dan pada saat saklar ditutup (t = 0), komponen L bersifat terbuka, maka pada saat saklar ditutup arus pada rangkaian adalah nol, sehingga pada t = 0 Persamaan (2.19) menjadi:

$$i = 0 = K\varepsilon^{-\frac{R}{L}.0} + \frac{V}{R}$$

maka diperoleh : $K = -\frac{V}{R}$

Harga K yang diperoleh ini disubtitusikan ke Persamaan (2.19), sehingga diperoleh:

$$i = -\frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$$

atau:

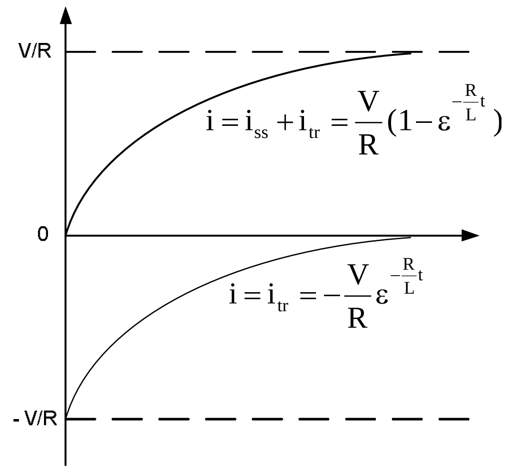
$$i = \frac{V}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (2.20)$$

Persamaan (2.20) ini adalah merupakan penyelesaian partikular dari Persamaan (2.17) dan persamaan ini merupakan bentuk dari persamaan arus pada rangkaian (Gambar 2.3) bilamana saklar ditutup.

Menurut Persamaan (2.16) maka bagian *steady state* dan transient Persamaan (2.20) ini dapat dinyatakan dengan :

$$i = \underbrace{\frac{V}{R}}_{\downarrow \; i_{ss}} + \underbrace{\left(-\frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)}_{\downarrow \; i_{tr}} \qquad (2.21)$$

Kalau Persamaan (2.21) ini digambarkan adalah sebagai berikut :

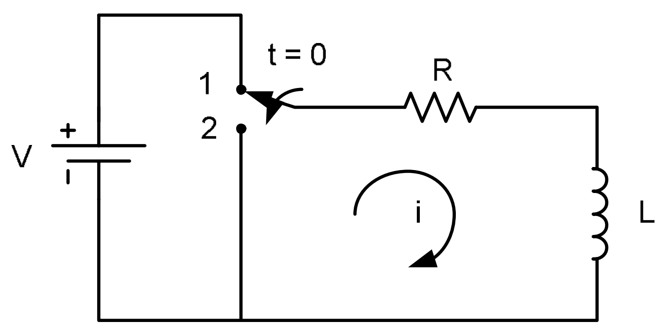


Gambar 2.4 Kurva dari Persamaan (2.21)

Dari gambaran kurva ini seolah-olah didalam rangkaian ada dua besaran arus, akan tetapi pembagian pada kurva ini hanyalah menggambarkan bentuk matematis dan hanya untuk mempermudah penganalisaan.

2.4.2 Konstanta Waktu (Time Constant)

Rangkaian dibawah ini sudah dalam keadaan steady state dan pada saat t = 0 saklar digeser keposisi 2 :



Gambar 2.5 Rangkaian RL dengan sumber tegangan V

Sebelum saklar dipindahkan ke posisi 2 pada rangkaian telah mengalir arus sebesar :

$$I_{(0-)} = \frac{V}{R} = I_0$$

Dan setelah saklar di posisi 2 maka persamaan arus pada rangkaian adalah :

$$i = \frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \tag{2.22}$$

atau dapat dituliskan dengan :

$$i = I_0\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \tag{2.23}$$

Dimana I_0 harga awal arus disaat t = 0 yang besarnya adalah $\frac{V}{R}$ dan misalkan $\tau = \frac{L}{R}$ (disebut sebagai konstanta waktu yang satuannya dalam detik), maka Persamaan (2.23) menjadi:

$$i = I_0\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$$

atau:

$$\frac{i}{I_0} = \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.24}$$

Seandainya diambil t = τ setelah saklar diposisi 2 atau selama satu konstanta waktu saklar di posisi 2 maka Persamaan (2.24) menjadi:

$$\frac{i}{I_0} = \varepsilon^{-\frac{\tau}{\tau}} = \varepsilon^{-1} = 0{,}367 = 36{,}7\ \%$$

atau:

$$i = 36{,}7\ \%.I_0$$

maka terlihat selama saklar diposisi 2 dalam waktu konstanta waktu, arus yang mengalir pada rangkaian adalah sebesar 36,7% dari arus awal [I_0].

Selanjutnya bila diambil waktu selama t = 4τ, maka arus yang mengalir pada rangkaian dalam empat konstanta waktu adalah :

$$i = \varepsilon^{-\frac{4\tau}{\tau}}.I_0 = 1{,}8\ \%.I_0$$

Bila ditinjau kembali Persamaan (2.20), maka konstanta waktu untuk rangkaian Gambar 2.1 tersebut dinyatakan dengan :

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{2.25}$$

Dan seandainya untuk rangkaian pada Gambar 2.1 untuk satu konstanta waktu setelah saklar ditutup adalah sebesar:

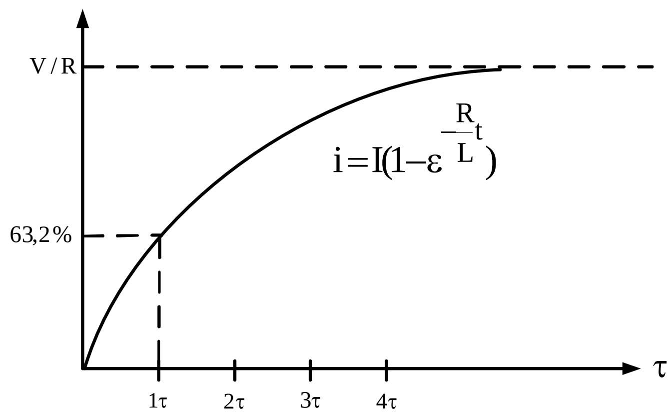
$$i = \frac{V}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

atau:

$$i = I\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

dimana : $I = \frac{V}{R}$ adalah arus steady state dari rangkaian, maka untuk selang waktu satu konstanta waktu setelah saklar ditutup pada rangkaian ada arus sebesar:

$$i_{(1\tau)} = I\left(1 - \varepsilon^{-\frac{1\tau}{\tau}}\right) = 0{,}632.I$$



Gambar 2.6 Kurva arus dalam satu konstanta waktu dari Persamaan (2.20)

Adapun tujuan dari diketahui konstanta waktu adalah untuk dapat membedakan performan dari setiap rangkaian.

2.4.3 Tegangan Transient Pada R dan L

Tegangan transient pada komponen R dan L dari rangkaian seri RL dapat ditentukan apabila arus dari rangkaian telah diketahui, sehingga untuk tegangan transient:

$$v_R = R.i = R.\frac{V}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

<u>Pada R:</u>

$$v_R = V\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

atau: (2.26)

Pada L:

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left[\frac{V}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)\right]$$

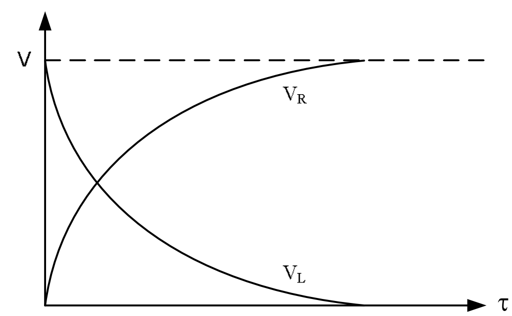
atau:

$$v_L = V\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \tag{2.27}$$

Dari Persamaan (2.26) dan (2.27) terlihat bahwa tegangan transient pada R merupakan bentuk eksponensial menaik sesuai dengan kenaikan τ, sedangkan pada L merupakan fungsi eksponensial menurun.

Kalau dijumlahkan Persamaan (2.26) dan (2.27) hasilnya sesuai dengan hukum tegangan Kirchoff pada rangkaian seri yaitu :

$$V = v_R + v_L = V(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}) + V\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = V \tag{2.28}$$



Gambar 2.7 Kurva V_R dan V_L sebagai fungsi τ

2.4.4 Daya Sesaat

Untuk menentukan daya sesaat (*instantaneous power*) pada setiap elemen pada rangkaian seri RL ini dapat dilakukan dengan mengalikan tegangan dan arus yaitu:

Pada R:

$$p_R = v_R.i = V\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)\times\frac{V}{R}\left(1-\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

atau:

$$p_R = \frac{V^2}{R}\left(1-2\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}+\varepsilon^{-2\frac{R}{L}t}\right)$$

Pada L:

$$p_L = v_L i = V\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \times \frac{V}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

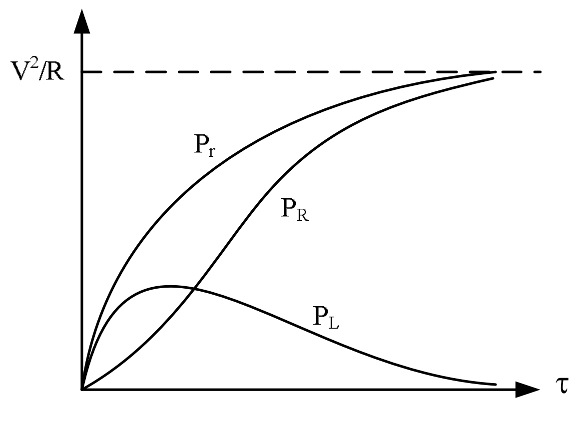
atau:

$$p_L = \frac{V^2}{R}\left(\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} - \varepsilon^{-2\frac{R}{L}t}\right) \qquad (2.29)$$

Sedangkan total daya :

$$p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (2.30)$$

Kalau ketiga daya digambarkan gambaran kurvanya adalah :



Gambar 2.8 Kurva P_R, P_L dan P_r

Terlihat bahwa p_R dan p_T memiliki harga steady state V^2/R atau $I^2.R$ dimana I adalah arus steady state, sedangkan daya transient pada L memiliki harga awal dan akhir yaitu nol, dan ini adalah merupakan energi yang tersimpan pada kumparan dalam bentuk medan magnet, untuk membuktikan hal ini maka integralkanlah Persamaan (2.30) dalam batas integrasi dari $0 \rightarrow \infty$ seperti dibawah ini:

$$W = \int_0^\infty \frac{V^2}{R}\left(\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} - \varepsilon^{-2\frac{R}{L}t}\right)dt$$

atau:

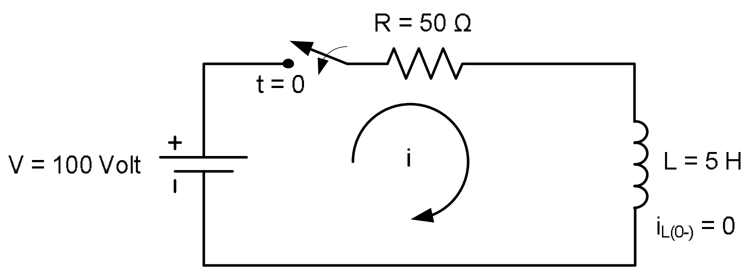
$$W = \frac{V^2}{R}\left[-\frac{L}{R}\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{L}{2R}\varepsilon^{-2\frac{R}{L}t}\right]_\infty^0$$

atau:

$$W = \frac{V^2}{2R}\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}I^2L \qquad (2.31)$$

Contoh:

Perhatikan rangkaian dibawah ini:



Carilah: a. Bentuk persamaan arus setelah saklar ditutup.

b. Bentuk persamaan tegangan pada R dan L setelah saklar ditutup.

c. Berapa besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama 0,5 det.

d. Berapa besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama satu konsatanta waktu rangkaian.

Jawab:

Setelah saklar ditutup, maka persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V$$

atau:

$$50.i + 5\frac{di}{dt} = 100$$

atau:

$$i + 0{,}1\frac{di}{dt} = 2$$

atau:

$$(i - 2) = -0{,}1\frac{di}{dt}$$

atau:

$$\frac{di}{(i-2)} = -10\,dt$$

Kalau persamaan ini diintegralkan maka diperoleh:

$$Ln(i-2) = -10t + K'$$

atau:

$$i-2 = \varepsilon^{-10t}.\varepsilon^{K'}$$

karena: $\varepsilon^{K'}$=K, maka persamaan menjadi:

$$i-2 = K.\varepsilon^{-10t}$$

atau:

$$i = K.\varepsilon^{-10t}+2 \qquad (a)$$

karena sifat dari L yang tidak dapat disubtitusikan ke persamaan (a), diperolehlah bentuk persamaan arus yang mengalir pada rangkaian setelah saklar ditutup :

a. $\underline{i = 2\left(1-\varepsilon^{-10t}\right)\text{Amp}}$

b. Bentuk persamaan tegangan di R setelah saklar ditutup adalah:

$$v_R = R.i = R.\left[2\left(1-\varepsilon^{-10t}\right)\right] = 50\left[2\left(1-\varepsilon^{-10t}\right)\right]$$

atau: $\underline{v_R = 100(1\text{-}\,\varepsilon^{-10t})\ \text{volt}}$

Bentuk persamaan tegangan di L setelah saklar ditutup adalah :

$$v_L = L\frac{di}{dt} = 5\frac{d}{dt}\left\lfloor 2(1-\varepsilon^{-10t})\right\rfloor = 5(20\varepsilon^{-10t})$$

atau: $\underline{v_L = 100.\varepsilon^{-10t}\ \text{volt}}$

c. Besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama 0,5 detik adalah:

$$i_{(0,5\ det)} = 2(1\text{-}\varepsilon^{-10.0,5})$$

atau:

$$\underline{i_{(0,5\,det)} = 1{,}98\ \text{Amp}}$$

d. Besar arus selama 1 konstanta waktu setelah saklar ditutup :

Satu konstanta waktu rangkaian adalah:

$$\tau = \frac{1}{10} = 0{,}1.\det.$$

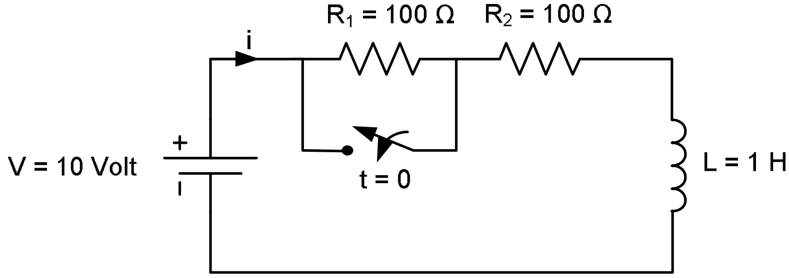
Maka besar arus pada saat satu konstanta waktu adalah :

$$i_{(\tau=0,1.det)} = 2(1\text{-}\varepsilon^{-10.0,1})$$

atau: $i_{(\tau\text{-}0,1.det)} = 1{,}26.\text{Amp}.$

Contoh:

Rangkaian dibawah ini sudah dalam keadaan steady state.



Carilah berapa besar :

a. Besar arus yang mengalir pada rangkaian setelah ditutup selama 5 milidetik.
b. Besar tegangan pada R setelah saklar ditutup selama 5 milidetik.
c. Besar tegangan di L setelah saklar ditutup selama 5 milidetik

Jawab :

Dalam keadaan steady state (t = 0-) pada rangkaian telah ada arus sebesar :

$$I_{(0-)} = \frac{V}{R_1 + R_2} = \frac{10}{100+100} = 0{,}05\,\text{Amp.}$$

Setelah saklar ditutup, persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$V = R_2.i + L\frac{di}{dt}$$

atau: $$10 = 100.i + 1.\frac{di}{dt}$$

atau: $$i + 0{,}01\frac{di}{dt} = 0{,}1$$

atau: $$i - 0{,}1 = -0{,}01\frac{di}{dt}$$

atau: $$\frac{di}{(i-0{,}1)} = -100dt$$

kalau diintegralkan: $$\int\frac{di}{(i-0{,}1)} = -100\int dt$$

atau: $$\text{Ln}(i - 0{,}1) = -100t + K'$$

atau: $$(i - 0{,}1) = \varepsilon^{-100t+K'} = \varepsilon^{-100t}.\varepsilon^{K'}$$

atau : $$i = K\varepsilon^{-100t} + 0{,}1 \qquad \text{(a)}$$

Pada t(0-), telah ada arus pada rangkaian sebesar 0,05 Amp., dan karena sifat L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0, pada rangkaian juga mengalir arus sebesar 0,05 Amp., maka bilamana pada Persamaan (a) dibuat untuk t = 0 sehingga:

$$i_{(0)} = 0{,}05 = K\varepsilon^{-100.0} + 0{,}1$$

maka diperoleh : K = -0,05.

Kemudian harga K yang diperoleh ini disubtitusikan ke Persamaan (a). sehingga didapat bentuk persamaan arus pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$i = 0{,}05(2 - \varepsilon^{-100t})$$

maka besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selama 5 milidetik adalah :

a. $i_{(5.10\text{-}3.det)} = 0{,}05\left(2 - \varepsilon^{-100.5.10^{-3}}\right) = 0{,}06967\,\text{Amp}$

b.Bentuk persamaan tegangan pada R adalah :

$$v_R = R_2.i = 100\left[0{,}05\left(2 - \varepsilon^{-100t}\right)\right]$$

atau:

$$v_R = 5(2 - \varepsilon^{-100t})$$

untuk t = 5.10^{-3} det.maka :

$$v_R = 5\left(2 - \varepsilon^{-100.5.10^{-3}}\right) = 6{,}967.\text{volt}$$

c. Bentuk persamaan tegangan pada L adalah :

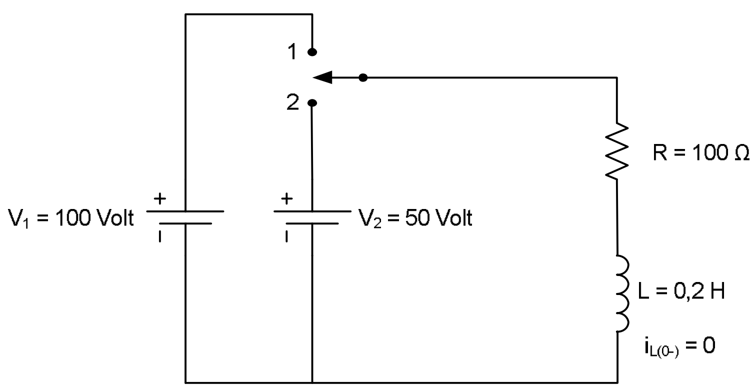
$$v_L = L\frac{di}{dt} = 1\frac{d}{dt}\left(0{,}1 - 0{,}05\varepsilon^{-100t}\right) = 5\varepsilon^{-100t}$$

Untuk t = 5.10^{-3} maka :

$$v_L = 5\varepsilon^{-100.5.10^{-3}} = 3{,}032.\text{volt}$$

Contoh :

Rangkaian seperti di bawah ini :



Pada saat t = 0, saklar ditempatkan pada posisi 1 dan setelah 500 μdet pada posisi 1, maka saklar dipindahkan ke posisi 2. Carilah :

a. Bentuk persamaan arus pada rangkaian di saat saklar di posisi 1
b. Bentuk persamaan arus pada rangkaian di saat saklar di posisi 2

Jawab:

Disaat saklar di posisi 1 maka persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V_1$$

atau:

$$100.i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 100$$

atau:

$$i + 0{,}002\frac{di}{dt} = 1$$

atau:

$$\frac{di}{(i-1)} = -500t$$

Bila diintegralkan hasilnya adalah :

$$Ln(i - 1) = -500t + K_1^{'}$$

atau:

$$i - 1 = \varepsilon^{-500t + K_1^{'}}$$

atau:

$$i - 1 = \varepsilon^{-500t}.\varepsilon^{K_1^{'}}$$

Karena : $K_1 = \varepsilon^{K_1^{'}}$, maka :

$$i = K_1\varepsilon^{-500.0} + 1 \qquad (*)$$

Dari rangkaian diketahui bahwa arus pada t = 0-, adalah nol dan karena sifat dari L yang tidak bias berubah dengan seketika maka pada t = 0 arus pada rangkaian juga nol, sehingga bila t = 0 dimasukkan ke persamaan (*) maka diperoleh :

$$i(0) = 0 = K_1\varepsilon^{-500.0} + 1$$

sehingga diperoleh $K_1 = -1$, dan bila harga ini disubtitusikan ke persamaan (*) maka diperoleh:

a. Persamaan arus di saat saklar di posisi 1 adalah :

$$\underline{i = 1 - \varepsilon^{-500t}.\text{Amp.}}$$

Saklar berada di posisi 1 selama 500 μdet, maka pada saat ini pada rangkaian telah ada arus sebesar :

$$i_{\left(500.10^{-6}.det\right)} = 1 - \varepsilon^{-500(500.10^{-6})} = 0{,}221.\text{Amp.}$$

Maka pada saat arus pada rangkaian sebesar 0,221 Amp. Saklar dipindahkan ke posisi 2

Bilamana saklar di posisi 2 maka persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V_2$$

atau:

$$100.i + 0{,}2\frac{di}{dt} = 50$$

atau:

$$i + 0{,}002\frac{di}{dt} = 0{,}5$$

atau:

$$(i\;\;0{,}5) = -\,0{,}002\frac{di}{dt}$$

atau:

$$\frac{di}{(i - 0{,}5)} = -500dt$$

Kalau diintegralkan maka hasilnya adalah :

$$Ln(i - 0{,}5) = -\,500t + K_2'$$

atau:

$$(i - 0{,}5) = \varepsilon^{-500t + K_2'} = \varepsilon^{-500t}.\varepsilon^{K_2'}$$

Karena $K_2 = \varepsilon^{K_2'}$, maka persamaan diatas menjadi :

$$(i - 0{,}5) = K_2\,\varepsilon^{-500t}$$

atau :

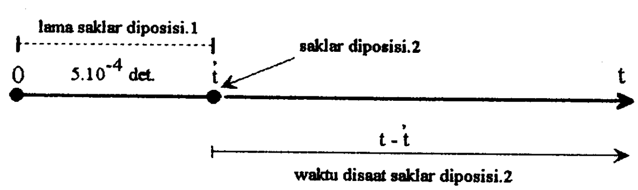
$$i = K_2\varepsilon^{-500t} + 0{,}5 \qquad (**)$$

Pada Persamaan (**) ini dimisalkan :

$t = t - t'$

$t \geq t'$

$t' = 500$ µdet $= 5.10^{-4}$ det.



maka Persamaan (**) menjadi :

$$i = K_2\varepsilon^{-500(t-t')} + 0{,}5 \qquad (***)$$

Selama saklar diposisi.l, pada rangkaian telah ada arus sebesar 0,221 Amp., dan disaat saklar dipindahkan ke posisi 2. (disaat t) arus masih tetap sebesar 0,221 Amp. hal ini disebabkan sifat dari L yang tidak bisa berubah seketika, maka untuk t = t' Persamaan (***) menjadi :

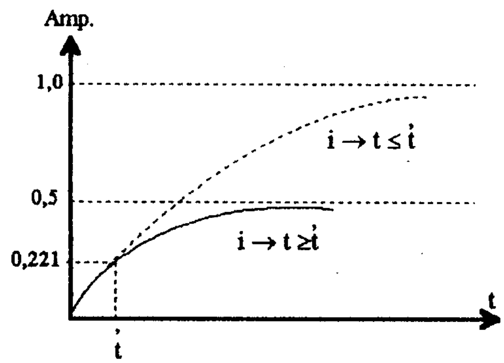
$$I(t') = 0,221 = K_2\varepsilon^{-500(t'-t')} + 0,5$$

maka diperoleh : K = -0,279, kemudian harga ini disubsitusikan kepersamaan (***), maka diperoleh :

b. Persamaan arus disaat saklar diposisi.2 adalah :

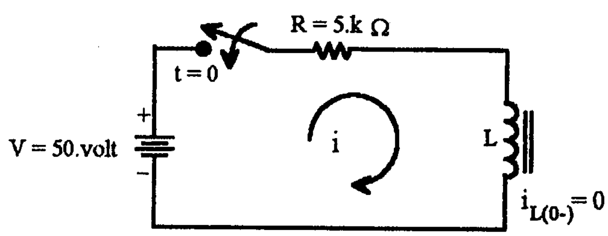
$$\underline{i = -0,279\varepsilon^{-500(t-t')} + 0,5.\text{Amp.} \rightarrow t \geq t'}$$

kalau digambarkan kurvanya :



Contoh :

Rangkaian dibawah ini adalah rangkaian ekivalen suatu relay.



Relay akan bekerja bilamana rangkaian dialiri oleh arus sebesar 7 mA, bilamana saklar ditutup pada saat t = 0, maka untuk mencapai arus sebesar 7 mA diperlukan waktu 0,2 detik, maka carilah :

a. Besar induktansi L dari relay.
b. Bentuk persamaan arus i

Jawab:

Kalau saklar ditutup maka persamaan tegangan pada rangkaian relay adalah :

$$R.i + L\frac{di}{dt} = V$$

atau : $$5000.i + L\frac{di}{dt} = 50$$

atau : $$i + \frac{L}{5000}\frac{di}{dt} = 0{,}01.$$

atau : $$i - 0{,}01 = -\frac{L}{5000}\frac{di}{dt}$$

atau : $$\frac{di}{(i - 0{,}01)} = -\frac{5000}{L}dt$$

kalau diintegralkan : $$Ln(i - 0{,}01) = -\frac{5000}{L}t + K$$

atau : $$(i - 0{,}01) = \varepsilon^{-\frac{5000}{L}t}.\varepsilon^{K}$$

karena : $K = \varepsilon^{K}$, maka :

$$i = K\varepsilon^{-\frac{5000}{L}t} + 0{,}01 \qquad (*)$$

Diketahui sebelum saklar ditutup (t = 0-), arus pada rangkaian relay adalah nol dan karena sifat dari L yang tidak bisa berubah seketika maka arus pada saat saklar ditutup (t = 0) juga akan nol, sehingga persamaan (*) diatas untuk t = 0 menjadi :

$$i(0) = 0 = K\varepsilon^{-\frac{5000}{L}.0} + 0{,}01$$

maka diperoleh : K = -0,01

Apabila harga K ini disubsitusikan kepersamaan (*) maka diperoleh :

$$i = 0{,}01\left[1 - \varepsilon^{-\frac{5000}{L}t}\right] \qquad (**)$$

karena relay akan bekerja bila rangkaian dialiri oleh arus 7mA, dan arus ini diperoleh bilamana saklar telah tertutup selama 0,2.detik, dan apabila harga-harga ini disubsitusikan kepersamaan (**) maka diperoleh :

$$i(0{,}2.det) = 7.10^{-3} = 0{,}01\left[1 - \varepsilon^{-\frac{5000}{L}.0{,}2}\right]$$

atau : $$0{,}7 = 1 - \varepsilon^{-\frac{1000}{L}}$$

atau : $$\varepsilon^{-\frac{1000}{L}} = 0{,}3$$

maka diperoleh :

a. <u>L = 830,58.H</u>

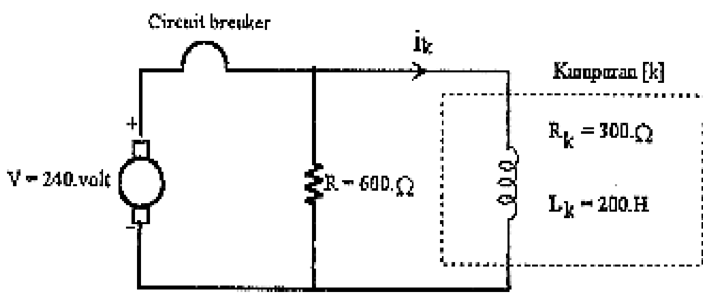
b. Selanjutnya harga L ini disubsitusikan ke Persamaan (**), maka diperoleh persamaan arus rangkaian :

$$i = 0{,}01\left[1 - \varepsilon^{-\frac{1000}{830{,}58}t}\right]$$

atau : $$\underline{i = 0{,}01\left[1 - \varepsilon^{-6{,}02\,t}\right]\text{Amp}}$$

Contoh :

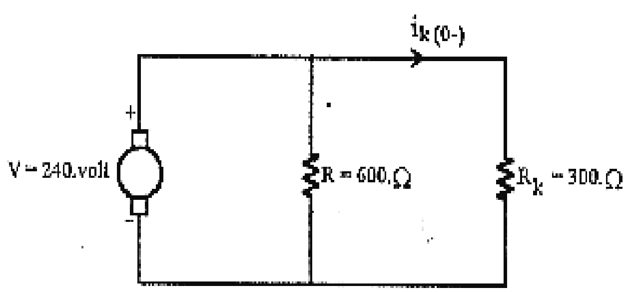
Sebuah generator DC mensuplai arus kerangkaian R yang paralel dengan kumparan k yang memiliki R_k dan induktansi L_k.



rangkaian diatas telah dalam keadaan steady state, carilah besar arus yanlg mengalir pada kumparan $[i_k]$ setelah circuit breaker terbuka selama 1 detik.

Jawab :

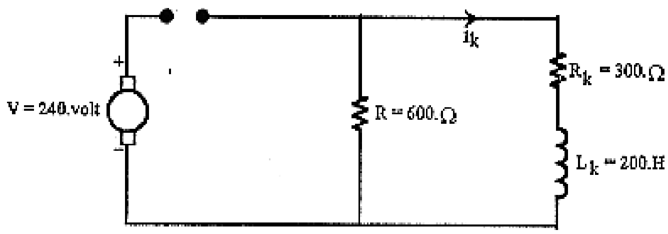
Dalam keadaan steady state rangkaian ekivalen adalah :



maka sebelum circuit breaker terbuka (t = 0-) dalam rangkaian telah ada arus yang melalui kumparan sebesar :

$$i_k(0-) = \frac{V}{R_k} = \frac{240}{300} = 0{,}8 \text{ A}$$

Apabila circuit breaker terbuka maka rangkaian ekivalen berbentuk :



sehingga persamaan tegangan pada rangkaian ini adalah :

$$R.i_k + R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} = 0$$

atau : $(R + R_k)\, i_k + L_k \frac{di_k}{dt} = 0$

atau : $(600 + 300)\, i_k + 200 \frac{di_k}{dt} = 0$

atau : $900.i_k + 200 \frac{di_k}{dt} = 0$

atau : $9i_k + 2 \frac{di_k}{dt} = 0$

atau : $\frac{di_k}{dt} = -4{,}5dt$

kalau diintegralkan : $\mathrm{Ln}(i_k) = -4{,}5t + K$

atau : $i_k = \varepsilon^{-4{,}5t+K} = \varepsilon^K\, \varepsilon^{-4{,}5t}$

karena $\varepsilon^K = K$, maka : $i_k = K\varepsilon^{-4{,}5t}$ (*)

Sebelum circuit breaker terbuka (t = 0-) arus pada rangkaian sebesar 0,8.Amp. dan karena sifat L yang tak dapat berubah dengan seketika maka pada t = 0, juga arus $i_k(0)$ = 0,8 Amp., sehingga kalau harga-harga ini disubsitusikan ke Persamaan (*) akan diperoleh :

$$i_k(0) = 0{,}8 = K\varepsilon^{-4{,}5.0}$$

dari sini diperoleh : K = 0,8. dan kemudian harga K ini disubsitusikan ke Persamaan (*), sehingga diperoleh persamaan arus pada rangkaian setelah circuit breaker terbuka adalah

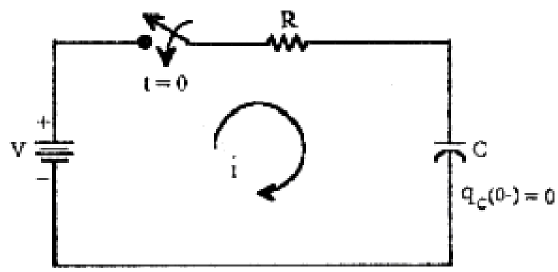
$$i_k = 0{,}8.\varepsilon^{-4{,}5t}$$

maka besar arus pada rangkaian setelah circuit breaker terbuka selama 1.detik adalah :

$$\underline{i_{k(1.\text{detik})} = 0{,}8.\varepsilon^{-4{,}5.1} = 0{,}0088\,\text{Amp.}}$$

2.5 Respons Dari Rangkaian Seri RC Dengan Sumber Tegangan Searah/Unit Step

Pada saat t = 0 saklar pada rangkaian dibawah ini ditutup.



Gambar 2.9 Rangkaian RC seri dengan sumber searah

maka menurut hokum tegangan Kirchoff persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \tag{2.32}$$

bilamana Persamaan (2.32) diatas dideferensiasikan satu kali, maka bentuknya menjadi:

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \tag{2.33}$$

dan seterusnya dibuat :

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}$$

kalau diintegralkan :

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

atau :

$$\mathrm{Ln}(i) = -\frac{t}{RC} + K$$

atau :

$$i = \varepsilon^{-\frac{t}{RC}+K}$$

atau :

$$i = \varepsilon^{K}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

karena : $K = \varepsilon^{K}$

maka :

$$i = K\varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.34}$$

persamaan ini merupakan penyelesaian umum (*general solution*) dari Persamaan (2.32).

2.5.1 Menentukan Konstanta K

Untuk mencari konstanta K pada Persamaan (2.34), dibuat Persamaan (2.32) untuk t = 0 sehingga didapat :

$$Ri_0 + \frac{1}{C}\int i_0 d.0 = V$$

maka diperoleh :

$$i_0 = \frac{V}{R}$$

selanjutnya i_0 ini disubsitusikan ke Persamaan (3.34) dengan t = 0, maka diperoleh :

$$i_0 = K\varepsilon^{-\frac{0}{RC}}$$

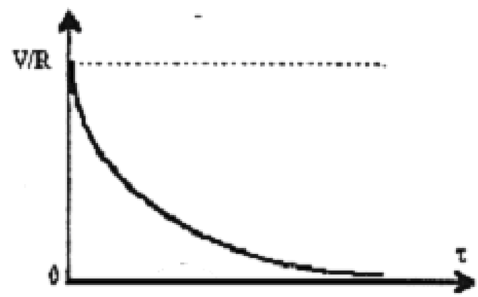
maka diperoleh : $K = i_0 = \frac{V}{R}$ dan kemudian harga K yang diperoleh ini disubsitusikan ke Persamaan (2.34) sehingga didapat persamaan arus atau Persamaan (2.34) menjadi :

$$i = \frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.35}$$

bilamana RC = π yang merupakan konstanta waktu rangkaian, maka Persamaan (2.35) menjadi :

$$i = \frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.36}$$

bilamana Persamaan (2.36) ini digambarkan kurvanya adalah sebagai berikut :



Gambar 2.10 Kurva arus dari Persamaan (2.36)

Terlihat bahwa i merupakan fungsi menurun dari eksponensial, hal ini memperlihatkan bahwa disaat saklar ditutup terjadi pengisian muatan pada C (dimana t = 0-, kapasitor tidak bermuatan) dan setelah muatan pada kapasitor penuh maka arus akan menjadi nol.

2.5.2 Tegangan Transient Pada R dan C

Tegangan transient pada R dan C dari rangkaian RC seri dapat apabila arus pada rangkaian telah diketahui, sehingga untuk tegangan transient :

Pada R.

$$V_R = R.i = R.\left[\frac{V}{R}\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

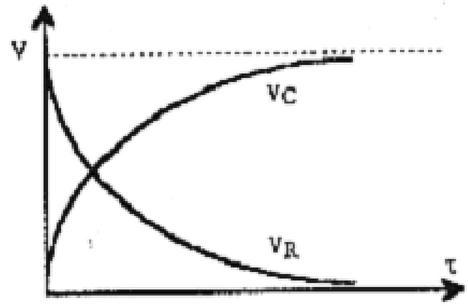
atau :

$$V_R = V.\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.37}$$

atau :

$$V_C = V\left[1-\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}\right] \tag{2.38}$$

kalau Persamaan (2.37) dan (2.38) digambarkan, maka kurvanya adalah sebagai berikut :



Gambar 2.11 Kurva V_R dan V_C

2.5.3 Daya Sesaat

Untuk mendapatkan daya sesaat pada R dan C dapat dicari dengan mengalikan tegangan pada R dan C dengan arus.

Pada R.

$$p_R = V_R \, . i = \left[V . \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] \left[\frac{V}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \frac{V^2}{R} \varepsilon^{-2\frac{t}{\tau}} \qquad (2.39)$$

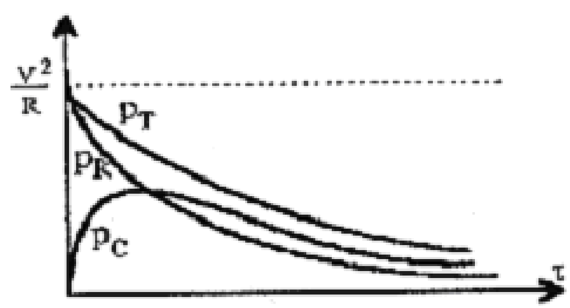
Pada C.

$$p_C = V_C . i = V \left[1 - \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] \left[\frac{V}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \frac{V^2}{R} \left[\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} - \varepsilon^{-2\frac{t}{\tau}} \right] \qquad (2.40)$$

dan :

$$p_T = p_R + p_C = \frac{V^2}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (2.41)$$

kalau digambarkan ketiga daya ini adalah :



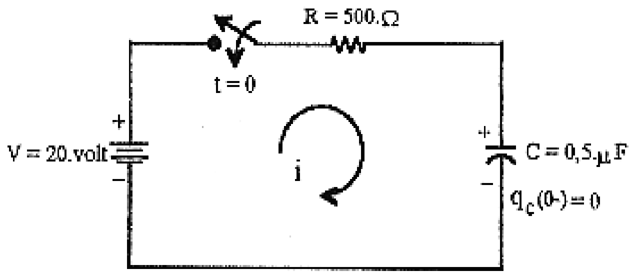
Gambar 2.12 Kurva P_R, P_C dan P_r

terlihat bahwa p_C memiliki harga awalan akhir nol, hal ini merupakan energi yang tersimpan pada kapasitor sebagai medan listrik pada tegangan konstan V, untuk membuktikan hal ini maka integralkan Persamaan (2.40) untuk batas integrasi $0 \rightarrow \infty$.

$$E = \int \frac{V^2}{R}\left[\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}} - \varepsilon^{-2\frac{t}{\tau}}\right]dt = \frac{1}{2}CV^2 \tag{2.42}$$

Contoh :

Perhatikan rangkaian dibawah ini :



pada saat t = 0 saklar pada rangkaian ditutup, maka carilah bentuk persamaan arus yang mengalir pada rangkaian.

Jawab :

Persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$R.i + \frac{1}{C}\int i.dt = V$$

atau : $500.i + \frac{1}{0{,}5.10^{-6}}\int idt = 20$

atau : $i + 4000\int idt = 0{,}04$ (*)

bila dideferensialkan : $\frac{di}{dt} + 4000.i = 0$

atau : $\frac{di}{i} = -4000dt$

di integralkan : $\int \frac{di}{i} = -4000\int dt$

atau : $Ln(i) = -4000t + K$

atau : $i = \varepsilon^{-4000t+K} = \varepsilon^{K}\varepsilon^{-4000t}$

karena : $\varepsilon^{K} = K$, maka : $i = K\varepsilon^{-4000t}$ (**)

bilamana Persamaan (*) dibuat pada t = 0, akan diperoleh :

$$i_0 + 4000\int i.d0 = 0{,}04$$

atau : $i_0 = 0{,}04$

harga i_0 ini disubsitusikan ke Persamaan (**) untuk t = 0 sehingga diperoleh :

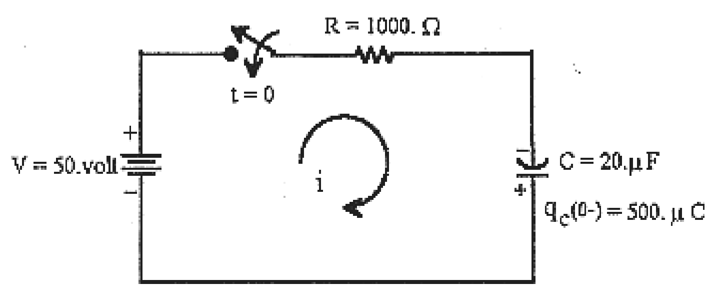
$$i_0 = 0{,}04 = K\varepsilon^{-4000.0}$$

maka diperoleh K = 0,04 dan kemudian harga ini disubsitusikan ke Persamaan (**) maka diperoleh bentuk persamaan arus pada rangkaian adalah :

$$\underline{i = 0{,}04.\varepsilon^{-4000\,t}\,\text{Amp.}}$$

<u>Contoh :</u>

Perhatikan rangkaian dibawah ini :



Pada saat t = 0 saklar pada rangkaian ditutup, carilah bentuk persamaan arus pada rangkaian setelah saklar ditutup.

<u>Jawab:</u>

Persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$R.i + \frac{1}{C}\int i dt = V$$

atau : $$1000.i + \frac{1}{20.10^{-6}}\int i dt = 50$$

atau : $$i + 50\int i dt = 0{,}05$$

dideferensialkan : $$\frac{di}{dt} + 50.i = 0$$

atau : $$i = -0{,}02\frac{di}{dt}$$

atau : $$\frac{di}{i} = -50dt$$

integralkan : $$\int\frac{di}{i} = -50\int dt$$

atau : $$Ln(i) = -50t + K$$

atau : $$i = \varepsilon^{-50t+K} = \varepsilon^{K}.\varepsilon^{-50t}$$

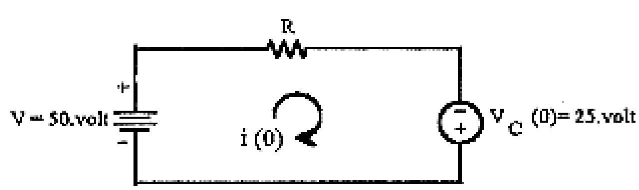
karena : $K = \varepsilon^{K}$, maka :

$$i = K\varepsilon^{-50t} \qquad (*)$$

Pada saat t = 0- kapasitor telah memiliki muatan sebesar $q_C(0-) = 500.\mu C = 5.10^{-4}.C$, sehingga pada saat t = 0-, pada terminal kapasitor telah ada tegangan sebesar :

$$V_C(0-) = \frac{q_c(0-)}{C} = \frac{5.10^{-4}}{20.10^{-6}} = 25.Volt$$

karena sifat dari C tak bisa berubah dengan seketika maka rangkaian ekivalen pada saat t = 0 adalah :



sehingga pada saat t = 0 telah mengalir arus pada rangkaian sebesar :

$$i(0) = \frac{V + V_C(0)}{R} = \frac{50 + 25}{1000} = 0{,}075.\text{Amp.}$$

maka kalau Persamaan (*) dibuat pada t = 0 akan diperoleh :

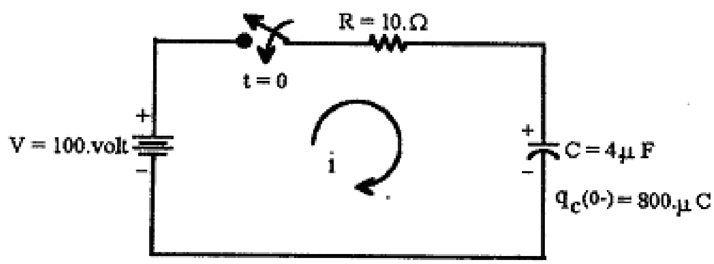
$$i(0) = 0{,}075 = K\,\varepsilon^{-50.0}$$

maka diperoleh : K = 0,075, kemudian harga K ini disubsitusikan ke dalam Persamaan (*) sehingga diperoleh persamaan arus pada rangkaian apabila saklar ditutup pada t = 0 adalah :

$$\underline{i = 0{,}075\varepsilon^{-50\,t}\ \text{Amp}}$$

Contoh :

Perhatikan rangkaian dibawah ini :



pada saat t = 0 saklar ditutup, carilah bentuk persamaan arus yang mengalir pada rangkaian.

Jawab :

Persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V$$

atau : $$10.i + \frac{1}{4.10^{-6}}\int i\,dt = 100.$$

atau : $$i + 25000\int i\,dt = 10$$

dideferensialkan : $$\frac{di}{dt} + 25000.i = 0$$

atau : $$\frac{di}{i} = -25000dt$$

integralkan : $$Ln(i) = -25000 + K'$$

atau : $$i = \varepsilon^{-25000+K'} = \varepsilon^{K'}.\varepsilon^{-25000t}$$

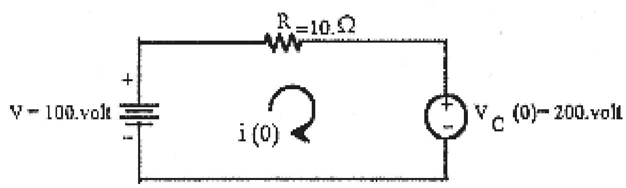
karena : ε^{K} = K, maka :

$$i = K\varepsilon^{-25000t} \qquad (*)$$

Sebelum saklar ditutup pada C telah ada muatan sebesar $q_C(0-)$ = 800.µF, karena sifat C yang tidak dapat berubah seketika, maka pada saat t = 0 pada C terdapat juga masih terdapat muatan sebesar $q_C(0)$ = 800 µF, sehingga pada saat t = 0 pada terminal C ada tegangan sebesar :

$$V_C(0) = \frac{q_C(0)}{C} = \frac{800.10^{-6}}{4.10^{-6}} = 200 \text{ Volt}$$

sehingga rangkaian ekivalen disaat saklar ditutup adalah :



maka terlihat bahwa pada t = 0, arus pada rangkaian adalah :

$$i_0 = \frac{V - V_C(0)}{R} = \frac{100 - 200}{10} = -10\,\text{Amp.}$$

sehingga Persamaan (*) pada t = 0 adalah :

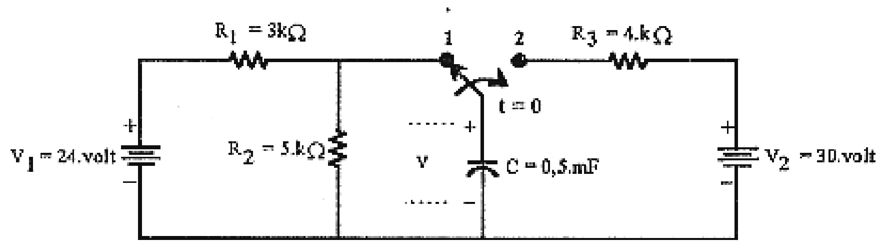
$$i_0 = -10 = K\varepsilon^{-25000.t}.\text{Amp.}$$

sehingga diperoleh K = -10, kemudian harga K ini disubsitusikan ke Persamaan (*), maka diperoleh persamaan arus pada rangkaian setelah penutupan saklar adalah :

$$\underline{i = -10.\varepsilon^{-25000.t}\ \ \text{Amp.}}$$

Contoh :

Rangkaian dibawah ini telah dalam keadaan steady state.

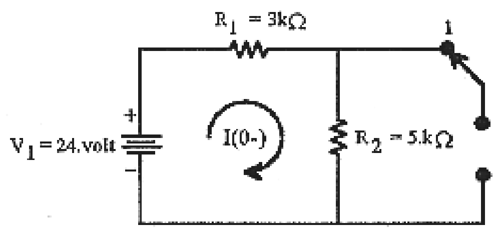


pada saat t = 0 saklar dipindahkan ke posisi.2. Carilah :

a. Bentuk persamaan tegangan V
b. Berapa besar tegangan V setelah saklar diposisi.2. selama 2.detik dan 4 detik.

Jawab :

Sebelum saklar dipindahkan ke posisi.2. rangkaian sudah dalam keadaan steady state, berarti pada terminal C telah ada tegangan sebesar tegangan pada R_2, sedangkan tegangan pada R_2 sewaktu t = 0- adalah :



maka terlihat bahwa :

$$I(0-) = \frac{V_1}{R_1 + R_2} = \frac{24}{3000 + 5000} = 0{,}003\,\text{Amp.}$$

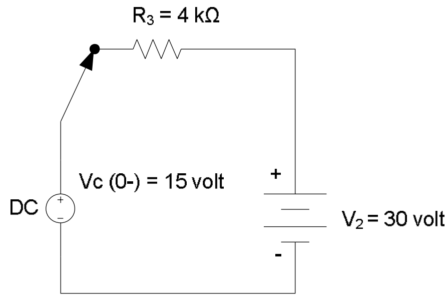
dan tegangan pada R_2 adalah :

$$V_{R2} = I(0-)xR_2 = 0{,}003x5000 = 15\,\text{Volt.}$$

sehingga disaat saklar dipindahkan ke posisi 2, pada kapasitor telah ada tegangan sebesar

$$V_{R2} = V_C(0-) = 15\,\text{Volt}$$

Bilamana saklar berada pada posisi 2 :



sehingga persamaan tegangan pada saat saklar diposisi dua adalah :

$$V2 - v_C(0-) = \frac{1}{C}\int i\,dt + R_3.i$$

atau :

$$30 - 15 = \frac{1}{0{,}5.10^{-3}}\int i\,dt + 4000.i$$

atau :

$$15 = 2000\int i\,dt + 4000.i$$

diferensialkan :

$$0 = 2000.i + 4000.\frac{di}{dt}$$

atau :

$$0 = i + 2\frac{di}{dt}$$

atau :

$$\frac{di}{i} = -0{,}5\ dt$$

integralkan :

$$\mathrm{Ln}(i) = -0{,}5t + K'$$

atau:

$$i = \varepsilon^{-0{,}5t + K'} = \varepsilon^{K'}\varepsilon^{-0{,}5t}$$

atau :

$$i = K\varepsilon^{-0{,}5t} \qquad (*)$$

karena sifat R yang berubah dengan seketika, maka pada t = 0, pada rangkaian ada arus sebesar :

$$i(0) = \frac{V_2 - v_C(0-)}{R_3} = \frac{30-15}{4000} = 0{,}0037\ \text{Amp}$$

sehingga Persamaan (*) pada t = 0 adalah :

$$i(0) = 0{,}00375 = K\varepsilon^{-0{,}5.0}$$

atau diperoleh : K = 0,00375, dan kemudian harga K ini didistribusikan ke dalam Persamaan (*). Sehingga diperoleh persamaan arus pada rangkaian di saat saklar diposisi 2 :

$$i = 0{,}00375\varepsilon^{-0{,}5t}$$

dan persamaan tegangan di C adalah :

$$v_C = \frac{1}{C}\int idt = \frac{1}{0{,}5.10^{-3}}\int 0{,}00375\varepsilon^{-0{,}5t} = -1{,}5\varepsilon^{-0{,}5t}$$

sehingga persamaan tegangan v adalah :

$$v = V_2 - v_C$$

atau :

$$v = 30 - 15.\varepsilon^{-0{,}5t}$$

sehingga besar tegangan v setelah saklar diposisi 2 :

a. selama 1 detik :

$$\underline{v_{(1det)} = 30 - 15\varepsilon^{-0{,}5.1} = 20{,}902\text{volt}}$$

b. selama 4 detik :

$$\underline{v_{(4det)} = 30 - 15\varepsilon^{-0{,}5.4} = 27{,}969\text{volt}}$$

2.6 Transient Dari Muatan q Pada Rangkaian RC Seri

Adakalanya pada rangkaian RC seri diperlukan persamaan yang menyatakan transient dari muatan q. Kalau rangkaian pada Gambar 2.8, pada saat t = 0 saklar ditutup, maka dapat dituliskan persamaan tegangan pada rangkaian :

$$R.i + \frac{1}{C}\int idt = V$$

karena : $i = \frac{dq}{dt}$, maka persamaan tegangan di atas dapat dituliskan dalam bentuk :

$$R.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\int \frac{dq}{dt}dt = V$$

atau :

$$R.\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

atau :

$$q + RC.\frac{dq}{dt} = CV$$

atau :

$$\frac{dq}{(q - CV)} = \frac{1}{RC}dt$$

kalau diintegralkan maka akan diperoleh :

$$Ln(q - CV) = -\frac{1}{RC}t + K'$$

atau :

$$(q - CV) = \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t + K'} = \varepsilon^{K'}\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}$$

karena : $\varepsilon^{K'} = K,$ maka :

$$(q - CV) = K\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}$$

atau :

$$q = K\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t} + CV \qquad (2.43)$$

karena pada t = 0- muatan pada C adalah nol dan karena sifat C yang tidak dapat berubah dengan seketika maka muatan C pada t = 0 yaitu $q_{(0)}$ = 0 dan kalau harga-harga ini disubsitusikan ke dalam persamaan (2.73) akan diperoleh :

$$q_{(0)} = 0 = K\varepsilon^{-\frac{1}{RC}.0} + CV \qquad (2.44)$$

dan diperoleh : K = -CV. Kemudian kalau harga K disubsitusikan ke dalam Persamaan (2.43), maka didapat persamaan muatan q pada rangkaian bila saklar ditutup pada saat t = 0 adalah :

$$q = CV\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (2.45)$$

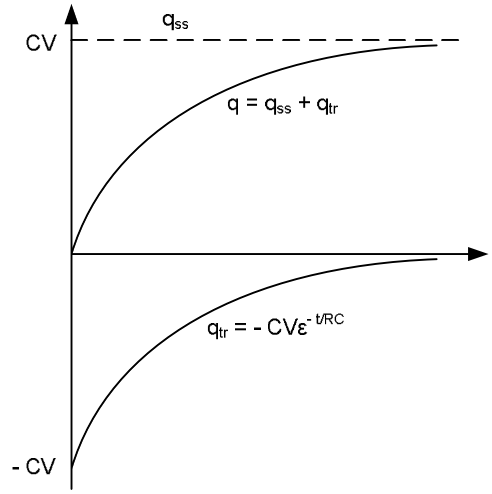
Maka menurut bentuk Persamaan (2.16) dapat dituliskan :

$$q = q_{ss} + q_{tr}$$

dimana :

$$q_{ss} = CV \text{ dan } q_{tr} = -CV\varepsilon^{-\frac{1}{RC}}$$

dan kalau digambarkan kurvanya :

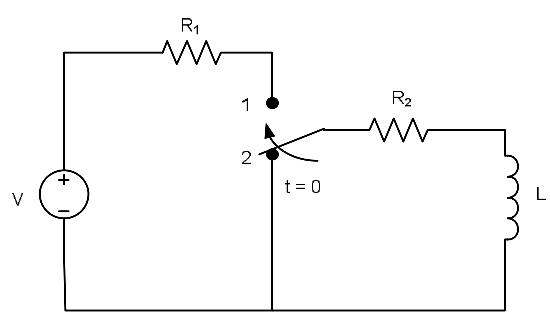


Gambar 2.13 Kurva muatan transient RC seri

bagian transient dari muatan q_{tr} akan menarik dengan perubahan waktu dan nol pada saat $t = \infty$, maka total muatan yang pada C adalah nol-nol pada mulanya dan sebesar CV pada saat $t = \infty$.

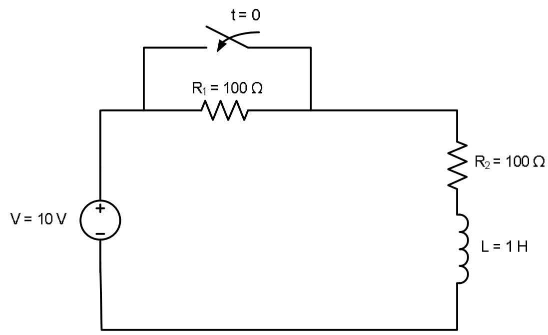
2.7 Soal Latihan

1. Perhatikan rangkaian di bawah ini telah dalam keadaan steady state.



Carilah bentuk persamaan tegangan pada R_1 dan L setelah t = 0.

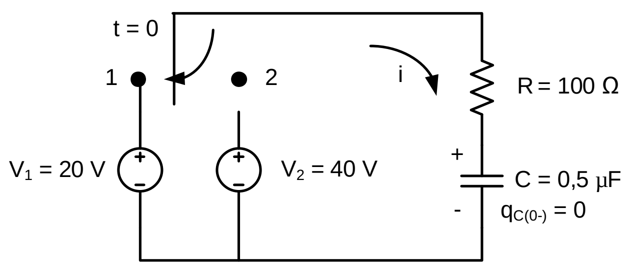
2. Rangkaian di bawah ini sudah dalam keadaan steady state.



Setelah saklar ditutup selama 5 milidetik, carilah :

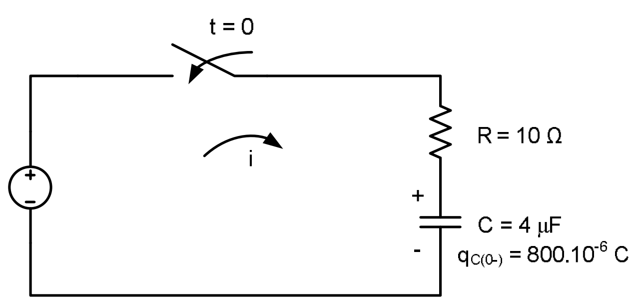
a. Besar arus yang mengalir pada rangkaian
b. Besar tegangan pada R_2
c. Besar tegangan pada L

3. Rangkaian seperti di bawah ini :



Pada saat t = 0 saklar digeser ke posisi 1 dan setelah 1 konstanta waktu rangkaian saklar digeser ke posisi 2. Carilah bentuk persamaan arus setelah saklar di posisi 2.

4. Rangkaian seperti di bawah ini :



Carilah persamaan arus i dan q muatan pada rangkaian setelah saklar ditutup.