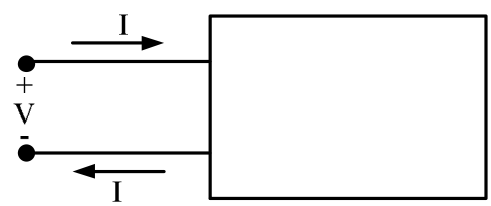
BAB 6
RANGKAIAN KUTUB EMPAT

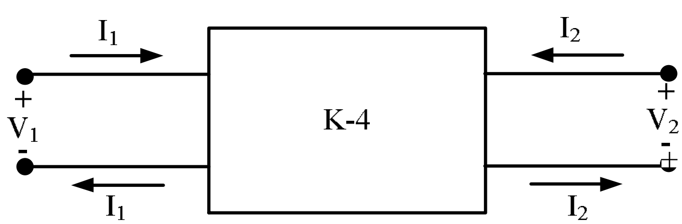
6.1 Pendahuluan

Sepasang terminal yang dilalui oleh arus (menuju atau meninggalkan terminal disebut sebagai rangkaian kutub dua (misalnya pada resistor, induktor dan kapasitor).



Gambar 6.1 Rangkaian kutub dua

Rangakaian kutub empat (K-4) adalah suatu rangkaian yang memiliki sepasang terminal pada sisi input dan sepasang terminal pada sisi output (transistor, op amp, transformator dan lainnya)



Gambar 6.2 Rangkaian kutub empat

Adapun teori rangkaian kutub empat (K-4) ini banyak dipergunakan pada jaringan (*network*) yang dipergunakan dalam sistem komunikasi, sistem kontrol, sistem daya (*power system*) dan rangkaian elektronik (model-model transistor).

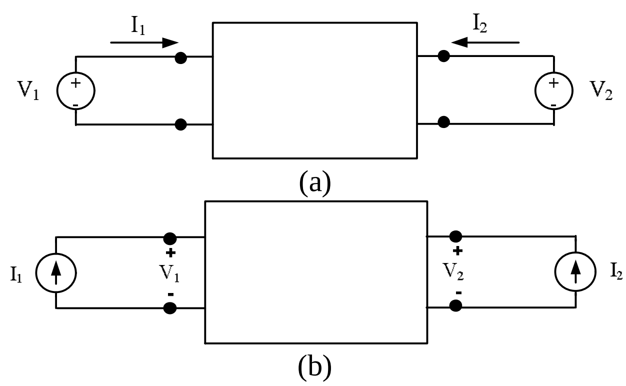
Pada rangkaian kutub empat ini diperlukan hubungan antara V_1, V_2 , I_1 dan I_2 yang saling independent, dimana berbagai macam hubungan antara tegangan dan arus disebut sebagai parameter.

Selanjutnya juga akan diperlihatkan hubungan antara parameter-parameter dan bagaimana pula hubungan antara kutub empat (seri, parallel dan kaskade).

6.2 Parameter Impedansi "z"

Parameter impedansi "z" ini pada umumnya banyak dipergunakan dalam sintesa filter, dan juga dalam penganalisaan jaringan *impedance matching* dan juga pada distribusi sistem tenaga.

Rangkaian kutub empat ada dengan sumber-sumber tegangan ataupun sumber-sumber arus.



Gambar 6.3 (a) Rangkaian kutub empat dengan sumber tegangan ;
(b) Rangkaian kutub empat dengan sumber arus

Adapun bentuk hubungan tegangan dalam parameter impedansi 'z' ini adalah :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

dalam bentuk matrik :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

dengan :

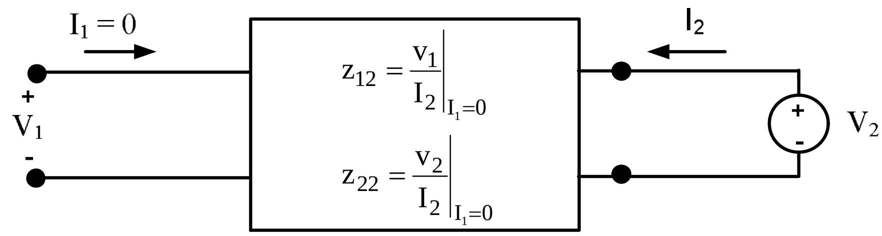
$$\Delta z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} = z_{11}.z_{22} - z_{12}.z_{21}$$

dimana Δz ini disebut sebagai determinan impedansi dari parameter "z".

Adapun "z" disebut sebagai parameter impedansi atau sering juga disebut dengan parameter "z" yang satuannya dalam ohm.

Untuk menentukan harga-harga dari parameter "z" ini dapat dilakukan dengan membuat / mengatur besaran $I_1 = 0$ ataupun $I_2 = 0$.

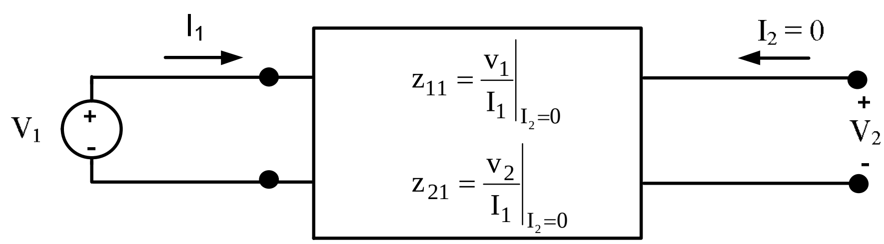
Untuk mendapatkan z_{12} dan z_{22} hubungkan tegangan V_2 (ataupun sumber arus I_2) pada terminal 2 dengan terminal 1 terbuka (atau $I_1 = 0$), maka diperoleh :



Gambar 6.4 Rangkaian untuk menentukan parameter-parameter z_{12} dan z_{22}

Sehingga :
$$\left.\begin{aligned} z_{12} &= \left.\frac{v_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \\ z_{22} &= \left.\frac{v_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Untuk mendapatkan z_{11} dan z_{21}, pasangkan tegangan V_1 (ataupun sumber arus I_1) pada terminal 1 dengan terminal 2 dibuka (atau $I_2 = 0$) maka diperoleh :



Gambar 6.5 Rangkaian untuk menentukan parameter-parameter z_{11} dan z_{21}

Sehingga :
$$\left.\begin{aligned} z_{11} &= \left.\frac{v_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \\ z_{21} &= \left.\frac{v_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Karena parameter “z” diperoleh dengan membuka (open) terminal input ataupun output maka parameter ini sering juga disebut dengan parameter-parameter impedansi rangkaian terbuka (*open circuit impedance parameters*), dan selanjutnya :

z_{11} = disebut impedansi input rangkaian terbuka
(*open circuit input impedance*)

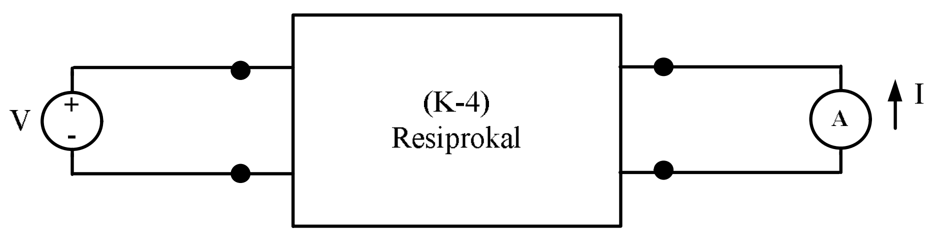
z_{12} = disebut transfer impedansi rangkaian terbuka dari terminal 1 ke terminal 2.
(*open circuit transfer impedance from port 1 to port 2*)

z_{21} = disebut transfer impedansi rangkaian terbuka dari terminal 2 ke terminal 1.
(*open circuit transfer impedance from port 2 to port 1*)

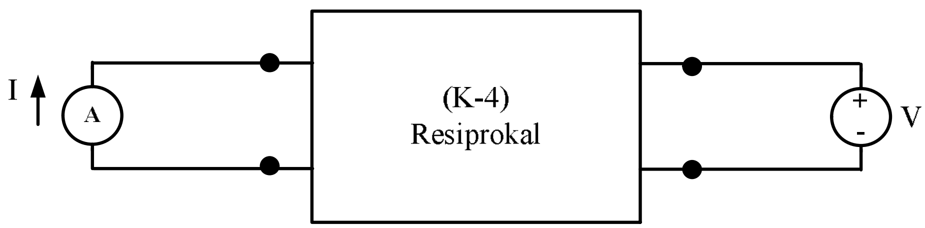
z_{22} = disebut impedansi output rangkaian terbuka
(*open circuit output impedance*)

Terkadang z_{11} dan z_{22} disebut juga sebagai *driving point impedances*, sedangkan z_{21} dan z_{12} disebut juga *transfer impedances*. Suatu *driving point impedance* adalah impedansi input dari suatu terminal peralatan, sehingga z_{11} adalah *input driving point impedance* dengan terminal output terbuka, sedangakan z_{22} adalah *output driving point impedance* dengan terminal input terbuka.

Bilamana $z_{11} = z_{22}$, maka rangkaian kutub empat (K-4) disebut simetris, selanjutnya bilamana rangkaian kutub empat adalah linier dan tidak memiliki sumber dependent maka impedansi transfer adalah sama ($z_{12} = z_{21}$), maka rangkaian kutub empat disebut resiprokal (*reciprocal*) dan ini berarti bilamana titik (terminal) eksitas dan respons saling dipertukarkan maka transfer impedansi akan tetap sama. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar berikut ini :



(a)

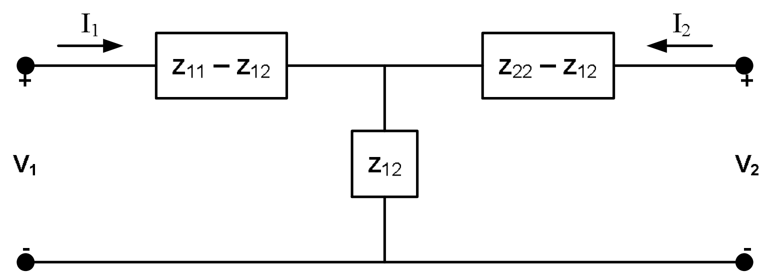


(b)

Gambar 6.6 Rangkaian resiprokal (a) ammeter di terminal kiri ; (b) ammeter di terminal kanan

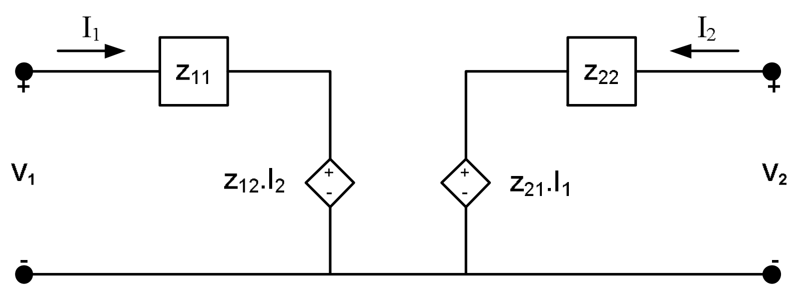
Rangkaian kutub empat di atas (Gambar 6.6.a) dengan sumber tegangan ideal V dan sebuah ammeter ideal A dengan membaca arus I, maka besar V adalah $V = z_{12}.I$, kemudian sumber V dan ammeter A dipertukarkan posisinya (Gambar 6.6.b), maka besar $V = z_{21}.I$, hal ini hanya bisa terjadi bilamana $z_{12} = z_{21}$.

Selanjutnya suatu rangkaian kutub empat yang bersifat resiprokal dapat digantikan dengan rangkaian ekivalen dengan hubungan T.



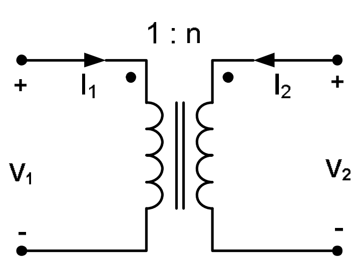
Gambar 6.7 Rangkaian ekivalen parameter “z” yang bersifat resiprokal

Untuk rangkaian kutub empat dengan parameter “z” secara umum rangkaian ekivalennya adalah sebagai berikut :



Gambar 6.8 Bentuk umum rangkaian ekivalen parameter “z”

Pada beberapa rangkaian terkadang tidak dapat dicari parameter “z” dari rangkaian kutub empat-nya, hal ini disebabkan tidak dapat dibuat persamaan rangkaian kutub empat-nya sebagaimana seperti Persamaan (6.1), misalnya seperti pada transformator ideal yang rangkiannya seperti berikut :



Gambar 6.9 Transformator ideal tidak memiliki parameter “z”

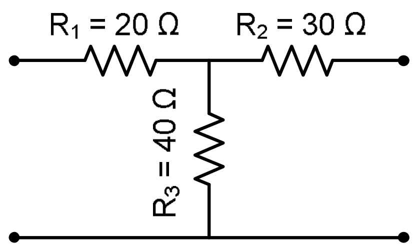
Adapun persamaan kutub empat untuk rangkaian transformator ideal Gambar 6.9, adalah :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{n}.V_2 \\ I_1 &= -n.I_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

maka terlihat tidak mungkin mengekspresikan tegangan bila ditinjau dari arus dan demikian pula sebaliknya, sehingga untuk kutub empat transformator ideal parameter “z” tidak ada.

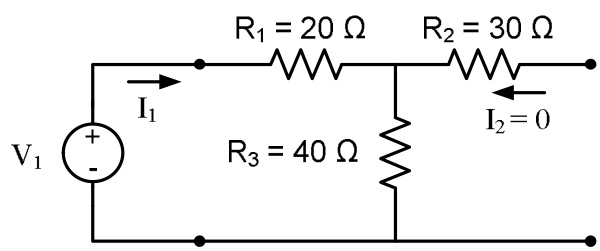
Contoh :

Carilah parameter “z” dari rangkaian di bawah ini :



Jawab :

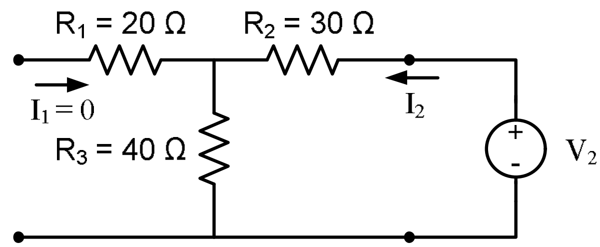
Untuk mendapatkan z_{11} dan z_{21}, maka pasangkan sumber tegangan V_1 pada terminal input dan terminal output terbuka.



$$z_{11} = \left.\frac{v_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(R_1 + R_3).I_1}{I_1} = (R_1 + R_3) = 20 + 40 = 60\ \Omega$$

$$z_{21} = \left.\frac{v_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{R_3.I_1}{I_1} = \frac{40.I_1}{I_1} = 40\ \Omega$$

Untuk mencari z_{12} dan z_{22}, maka V_1 dibuka dan sumber tegangan V_2 dipasangkan pada terminal output, sehingga rangkaian menjadi :



$$z_{12} = \left.\frac{v_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{R_3.I_2}{I_2} = R_3 = 40\ \Omega$$

$$z_{22} = \left.\frac{v_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(R_2 + R_3).I_2}{I_2} = (R_2 + R_3) = 30 + 40 = 70\ \Omega$$

Catatan : Terlihat hasil perhitungan z_{12} = z_{21}, maka kutub empat di atas adalah simetris.

6.3 Parameter Admitansi "y"

Parameter admitansi "y" juga pada umumnya banyak dipergunakan dalam sitesa filter, perencanaan penganalisaan *matching network* dan distrubusi sitem tenaga. Parameter "y", memperlihatkan arus-arus yang dinyatakan oleh tegangan terminal dengan persamaan sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

maka y_{11} ; y_{12} ; y_{21} ; y_{22} inilah yang disebut sebagai parameter-parameter admitansi "y" dari kutub empat suatu rangkaian yang satuannya siemen [S], dan kalau disusun dalam bentuk matrik adalah :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad (6.7)$$

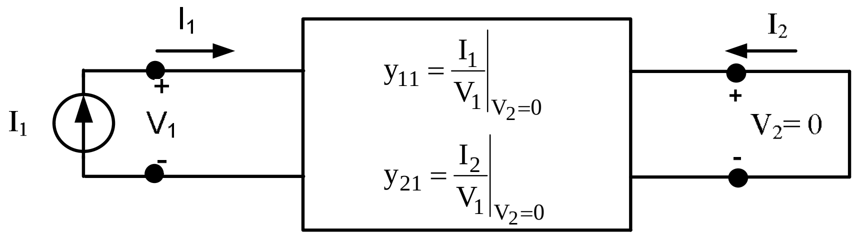
dimana dalam hal ini :

$$\Delta y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = y_{11}.y_{22} - y_{12}.y_{21}$$

yang mana Δy disebut sebagai determinan admitansi dari parameter "y".

Untuk mendapatkan parameter-parameter "y" ini dapat dilakukan dengan membuat $V_1 = 0$ ataupun $V_2 = 0$.

Untuk mendapatkan y_{11} dan y_{21} pasang sumber arus I_1 pada terminal input sedangkan terminal output dihubung singkat ($V_2 = 0$).



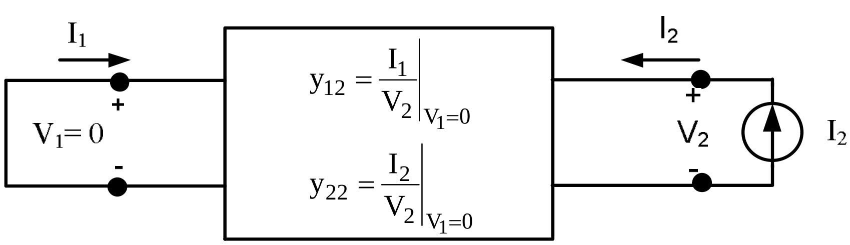
Gambar 6.10 Rangkaian untuk menentukan y_{11} dan y_{21}

Secara matematis dituliskan dengan :

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \tag{6.8}$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \tag{6.9}$$

Untuk mendapatkan y_{12} dan y_{22}, terminal input dihubung singkat ($V_1 = 0$)



Gambar 6.11 Rangkaian untuk menentukan y_{12} dan y_{22}

Maka secara matematis dapat dituliskan :

$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \tag{6.10}$$

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \tag{6.11}$$

Karena parameter "y" ini diperoleh dengan melakukan hubung singkat pada terminal input maupun pada terminal output, maka parameter ini sering juga disebut dengan parameter-parameter admitansi rangkaian hubung singkat (*short-circuit admitance parameters*), dimana :

y_{11} = disebut sebagai admitansi input rangkaian hubung singkat. (*short circuit input admitance*)

y_{12} = disebut sebagai transfer admitansi rangkaian hubung singkat dari terminal 2 ke terminal 1.(*short circuit transfer admitance from port 2 to port 1*)

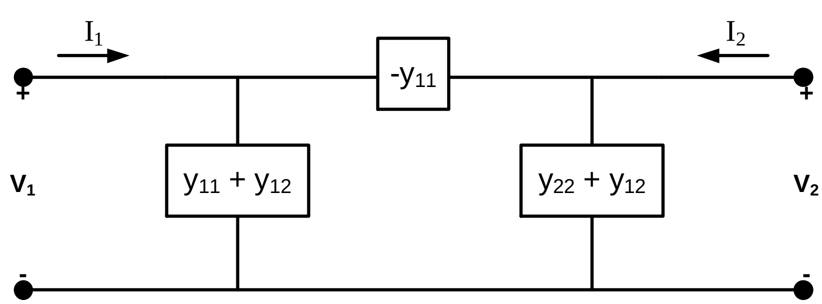
y_{21} = disebut sebagai transfer admitansi rangkaian hubung singkat dari terminal 1 ke terminal 2.(*short circuit transfer admitance from port 1 to port 2*)

y_{22} = disebut sebagai admitansi output rangkaian hubung singkat (*short circuit output admitance*)

Selanjutnya y_{11} dan y_{22} sering juga disebut sebagai *driving point admitance* sedangkan y_{12} dan y_{21} disebut sebagai *transfer admitance*. Suatu *driving point admitance* adalah admitansi input suatu terminal peralatan, sehingga y_{11} adalah admitansi input dengan terminal output terhubung singkat, dan y_{22} adalah admitansi output dengan terminal input terhubung singkat.

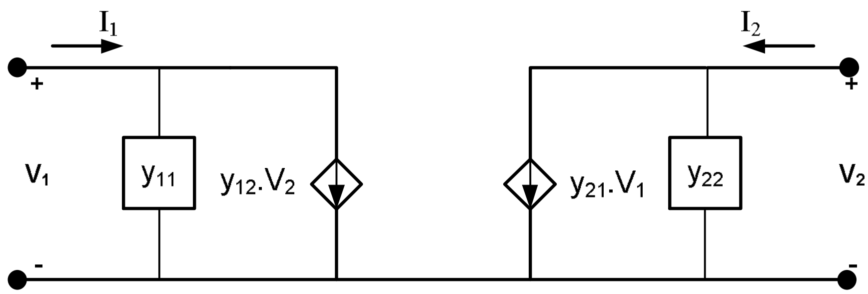
Untuk rangkaian kutub empat yang linier dan tidak mengandung sumber-sumber *dependent* didalamnya, maka transfer admitansi $y_{12} = y_{21}$, dan dalam kondisi ini disebut rangkaian adalah resiprokal (lihat parameter z).

Untuk kutub empat parameter "y" yang resiprokal, maka rangkaian ekivalennya (khusus yang resiprokal) merupakan rangkaian Π.



Gambar 6.12 Bentuk Rangkaian Π sebagai ekivalen untuk parameter "y" yang resiprokal

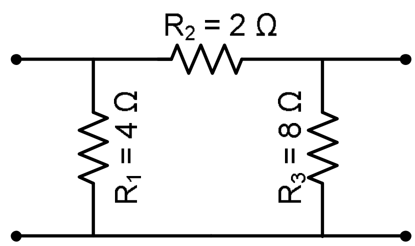
dan untuk kutub empat untuk parameter "y" pada umumnya rangkaian ekivalennya adalah sebagai berikut :



Gambar 6.13 Rangkaian ekivalen untuk parameter "y" secara umum

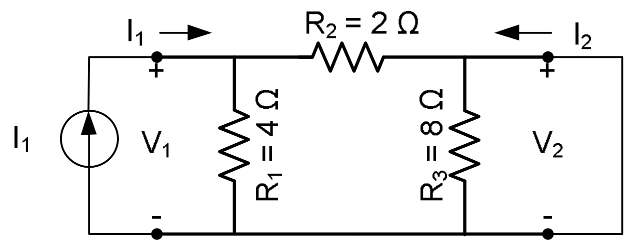
Contoh :

Hitunglah parameter-parameter "y" dari rangkaian di bawah ini :



Jawab :

Untuk mencari y_{11} dan y_{21} maka hubung singkat terminal output dan pasangkan sumber arus I_1 pada terminal input.



dari rangkaian terlihat bahwa R_1 paralel dengan R_2 atau :

$$R_{p1} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4.2}{4+2} = \frac{4}{3}\ \Omega$$

maka :

$$V_1 = I_1.R_{p1} = \frac{4}{3} I_1$$

sehingga menurut Persamaan (6.8) :

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{I_1}{\frac{4}{3}I_1} = \frac{3}{4}\ S$$

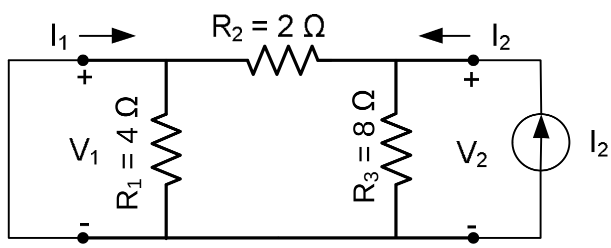
dengan pembagian arus :

$$-I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} x\, I_1 = \frac{4}{4+2} x\, I_1 = \frac{2}{3} I_1 \quad \text{atau} \;\rightarrow\; I_2 = -\frac{2}{3} I_1$$

maka Persamaan (6.9) :

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-\frac{2}{3}I_1}{\frac{4}{3}I_1} = -\frac{1}{2}\ S$$

Untuk mendapatkan y_{12} dan y_{22} maka hubung singkat terminal input dan pasangkan sumber arus I_2 pada terminal output.



Dari rangkaian terlihat bahwa R_2 paralel R_3 sehingga :

$$R_{p2} = \frac{R_2.R_3}{R_2+R_3} = \frac{2.8}{2+8} = \frac{8}{5}\ \Omega$$

sehingga :

$$V_2 = I_2.R_{p2} = \frac{8}{5} I_2$$

maka menurut Persamaan (6.11) :

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{I_2}{\frac{8}{5}I_2} = \frac{5}{8}\ S$$

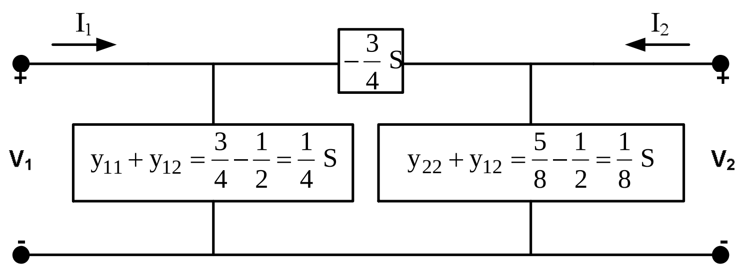
dengan pembagian arus :

$$-I_1 = \frac{R_3}{R_2+R_3} x\, I_2 = \frac{8}{2+8} x\, I_2 = \frac{4}{5} I_2 \quad \text{atau} \;\rightarrow\; I_1 = -\frac{4}{5} I_2$$

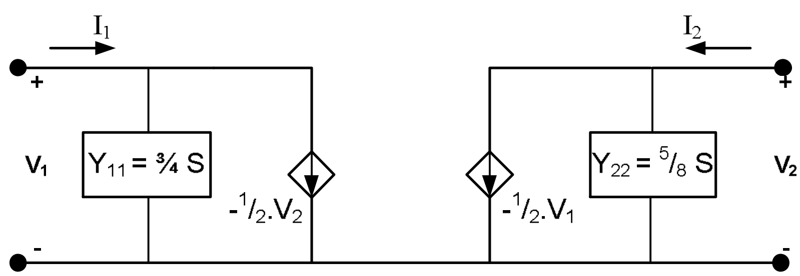
maka menurut Persamaan (6.10) :

$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-\frac{4}{5}I_2}{\frac{8}{5}I_2} = -\frac{1}{2}\ S$$

ternyata $y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{2}\ S$, maka rangkaian merupakan rangkaian yang resiprokal, dimana kalau digambarkan rangkaian ekivelennya (khusus resiprokal) adalah :



Rangkaian ekivalen secara umum :



6.4 Parameter "h"

Parameter "h" ini sering juga disebut dengan parameter Hibrid (*Hybrid parameters*), parameter ini mengandung sifat-sifat dari parameter "z" dan "y". Pada sistem parameter "h" ini tegangan input dan arus output dinyatakan/ditinjau dari arus input dan tegangan output. Adapun bentuk persamaan dari parameter "h" ini adalah :

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \tag{6.12}$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \tag{6.13}$$

dalam bentuk matrik :

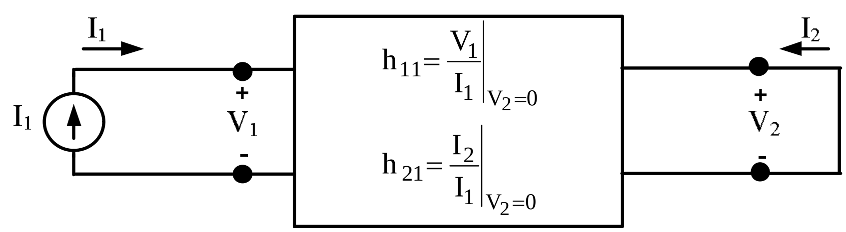
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

dengan :

$$\Delta h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11}.h_{22} - h_{12}.h_{21} \tag{6.15}$$

dimana Δh ini disebut sebagai determinan dari parameter “h”.

Untuk mendapatkan h_{11} dan h_{21} hubungkan sumber arus/tegangan pada input sedangkan terminal output dihubung singkat.



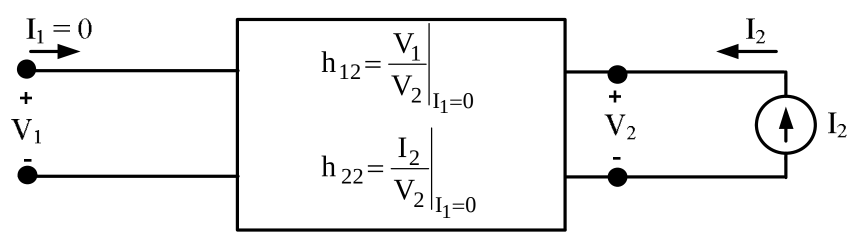
Gambar 6.14 Rangkaian untuk mencari h_{11} dan h_{21}

Secara matematis dituliskan dengan :

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \tag{6.16}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \tag{6.17}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan h_{12} dan h_{22} hubungkan sumber arus/tegangan pada terminal output sedangkan terminal input dibuka.



Gambar 6.15 Rangkaian untuk mencari h_{12} dan h_{22}

maka secara matematis dituliskan dengan :

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} \qquad (6.18)$$

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \qquad (6.19)$$

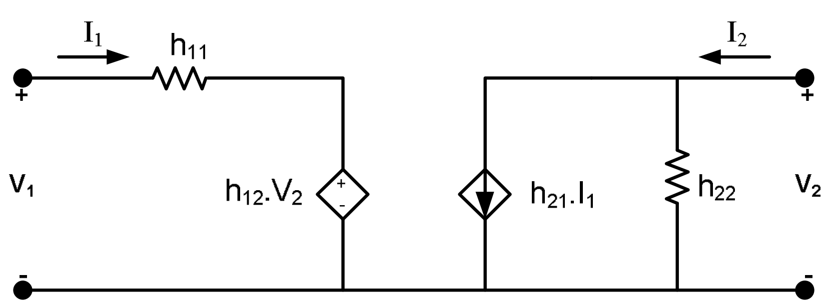
h_{11} = disebut sebagai impedansi input hubung singkat.
(*short circuit input impedance*)

h_{12} = disebut sebagai penguat tegangan balik rangkaian terbuka.
(*open circuit reverse voltage gain*)

h_{21} = disebut penguat arus maju rangkaian hubung singkat
(*short circuit forward current gain*)

h_{22} = disebut sebagai admitansi output rangkaian terbuka
(*short circuit output admitance*)

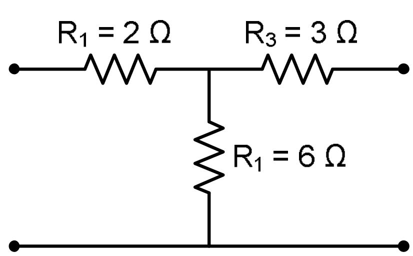
dan apabila h_{12} = -h_{21} maka rangkaian kutub empat disebut sebagai rangkaian kutub empat yang resiprokal. Selanjutnya untuk parameter "h" ini rangkaian ekivalennya adalah :



Gambar 6.16 Bentuk ekivalen dari parameter 'h"

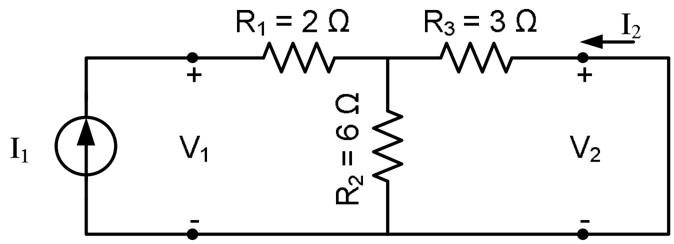
Contoh :

Hitunglah parameter-parameter "h" dari rangkaian di bawah ini :



Jawab :

Untuk mencari h_{11} dan h_{21}, maka hubung singkat terminal output dan pasangkan sumber arus I_1 pada terminal input.

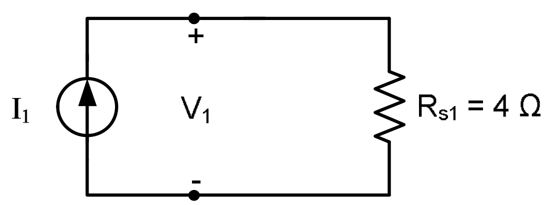


dari rangkaian ini terlihat bahwa :

R₂ paralel dengan R₃ $\rightarrow R_{p1} = \dfrac{R_2.R_3}{R_2 + R_3} = \dfrac{6 \, x \, 3}{6+3} = 2 \ \Omega$

Rp_1 seri dengan R_1 $\rightarrow R_{s1} = R_1 + R_{p1} = 2 + 2 = 4 \ \Omega$

Maka rangakain pengganti :

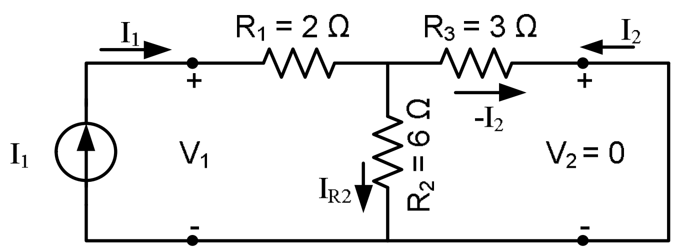


maka : $V_1 = R_{s1}.I_1 = 4.I_1$

dengan demikian :

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{4I_1}{I_1} = 4 \ \Omega$$

dengan pembagian arus :



maka :

$$-I_2 = \frac{R_2.I_1}{R_2 + R_3} = \frac{6.I_1}{6+3} = \frac{2}{3}I_1$$

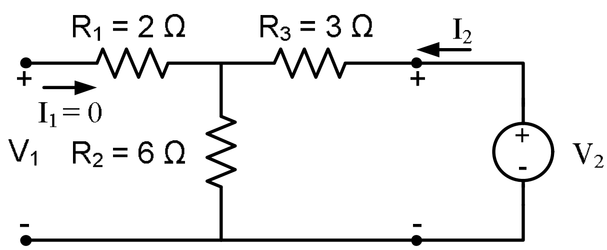
atau :

$$I_2 = -\frac{2}{3}I_1$$

sehingga :

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{-\frac{2}{3}.I_1}{I_1} = -\frac{2}{3}$$

Selanjutnya untuk mencari h_{12} dan h_{22}, maka terminal input dibuka dan pasangkan sumber tegangan V_2 pada terminal output.



maka menurut rangkaian pembagi tegangan :

$$V_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_3}.V_2 = \frac{6}{6+3}.V_2 = \frac{2}{3}.V_2$$

sehingga :

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\frac{2}{3}.V_2}{V_2} = \frac{2}{3}$$

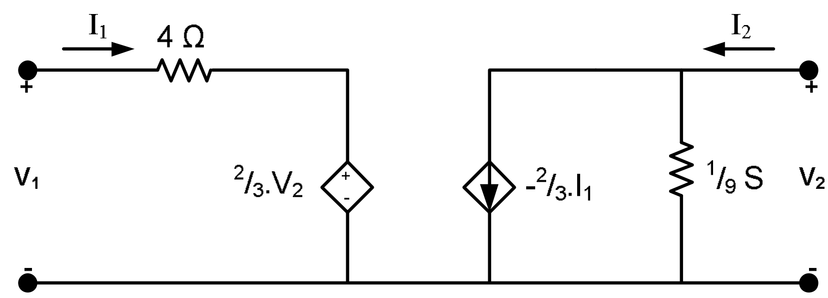
sedangkan :

$$V_2 = (R_2 + R_3)I_2 = (6+3).I_2 = 9.I_2$$

maka :

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{I_2}{9.I_2} = \frac{1}{9}S$$

kalau digambarkan rangkaian ekivalennya :



6.5 Parameter "g"

Parameter "g" sering juga disebut sebagai kebalikan / invers dari parameter "h", dimana dalam parameter "g" ini, arus input dan tegangan output dinyatakan /ditinjau dari tegangan input dan arus output. Adapun bentuk persamaan parameter "g" ini adalah :

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \tag{6.20}$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \tag{6.21}$$

dalam bentuk matrik Persamaan (6.20) dan (6.21) adalah sebagai berikut :

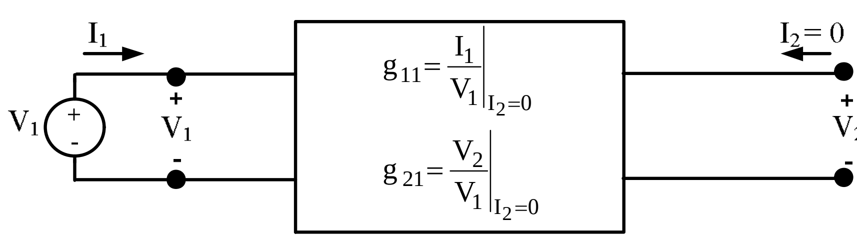
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

dengan :

$$\Delta g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}.g_{22} - g_{12}.g_{21} \tag{6.23}$$

dimana Δg ini disebut sebagai determinan dari parameter "g".

Untuk mendapatkan g_{11} dan g_{21} buka terminal output dan pasangkan sumber tegangan V_1 pada terminal input, seperti terlihat pada gambar di bawah ini :



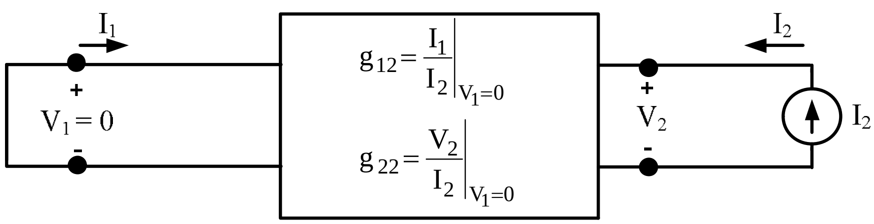
Gambar 6.17 Rangkaian untuk menentukan harga-harga g_{11} dan g_{21}

Secara matematis dituliskan dengan :

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} \tag{6.24}$$

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} \tag{6.25}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan g_{12} dan g_{22}, hubung singkat terminal input dan hubungkan sumber arus I_2 pada terminal output seperti terlihat pada gambar di bawah ini :



Gambar 6.18 Rangkaian untuk menentukan harga-harga g_{12} dan g_{22}

sehingga secara matematis dituliskan dengan :

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0} \tag{6.26}$$

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} \tag{6.27}$$

Pada parameter "g" ini selalu disebut :

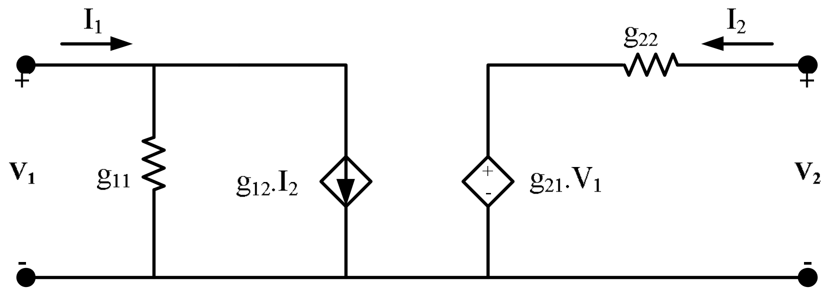
g_{11} = admitansi input rangkaian terbuka (*open-circuit input admitance*)

g_{12} = penguat arus balik rangkaian hubung singkat (*short-circuit reverse current gain*)

g_{21} = penguat tegangan maju rangkaian terbuka (*open-circuit forward voltage gain*)

g_{22} = impedansi output rangkaian hubung singkat (*short- circuit output impedance*)

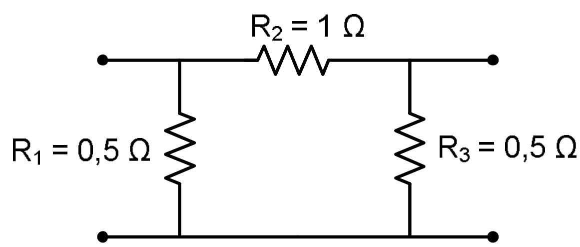
Adapun rangkaian ekivalen untuk parameter "g" ini diperlihatkan seperti pada Gambar 6.19, di bawah ini :



Gambar 6.19 Bentuk ekivalen dari parameter ‘g”

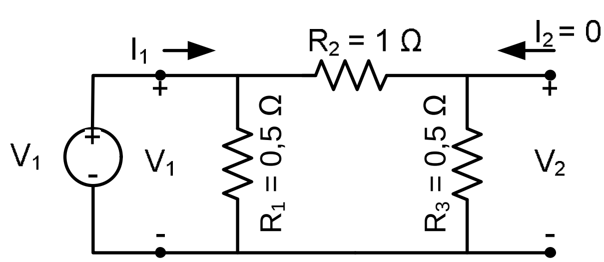
Contoh :

Carilah parameter “g” dari rangkaian berikut ini :



Jawab :

Untuk mencari g_{11} dan g_{21} pasang pada sumber tegangan V_1 pada terminal input sedangkan terminal output terbuka.



dari rangkaian terlihat bahwa :

R_2 seri R_3 $\rightarrow R_{s1} = R_2 + R_3 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\Omega$

R_{s1} paralel dengan R_1 $\rightarrow R_{p1} = \frac{R_1.R_{s1}}{R_1 + R_{s1}} = \frac{0,5 \times 1,5}{0,5 + 1,5} = \frac{0,75}{2} = 0,375\ \Omega$

maka :

$$I_1 = \frac{V_1}{R_{p1}} = \frac{V_1}{0,375} = 2,667.V_1$$

sehingga :

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} = \frac{2,667.V_1}{V_1} = 2,667\ S$$

selanjutnya :

$$I_1 = 2,667.V_1 \rightarrow \text{maka : } V_1 = \frac{I_1}{2,667} = 0,375.I_1$$

karena :

$$I_{R3} = \frac{R_1}{R_1 + R_{s1}} I_1 = \frac{0,5}{0,5 + 1,5} I_1 = 0,25.I_1$$

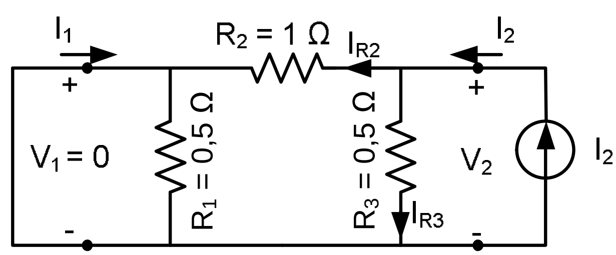
maka :

$$V_2 = I_{R3}.R_3 = 0,25.I_1.0,5 = 0,125.I_1$$

sehingga :

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0,125.I_1}{0,375.I_1} = 0,333$$

Selanjutnya untuk mendapatkan g_{12} dan g_{22}, maka hubung singkat terminal input, sedangkan pada terminal output dipasangkan sumber arus I_2.



Dari rangkaian terlihat :

$$I_{R2} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.I_2 = \frac{0,5}{1 + 0,5}.I_2 = 0,333.I_2 = -I_1$$

maka :

$$I_1 = -I_{R2} = -0.333.I_2$$

sehingga :

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0} = \frac{-0.333.I_2}{I_2} = -0,333$$

kemudian dari rangkaian juga terlihat bahwa R_2 paralel R_3 atau :

$$R_p = \frac{R_2.R_3}{R_2 + R_3} = \frac{1x\,0,5}{1+0,5} = 0,333\ \Omega$$

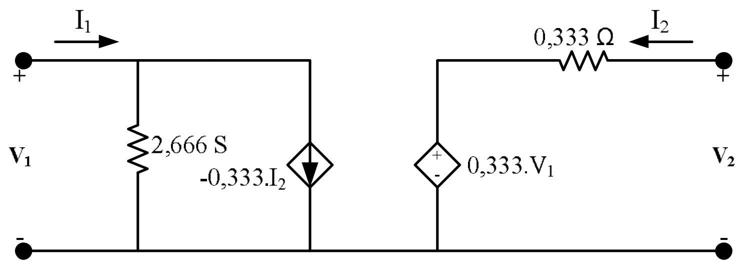
maka :

$$V_2 = R_{p.}I_2 = 0.333.\,I_2$$

sehingga :

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} = \frac{0,333I_2}{I_2} = 0,333\ \ \Omega$$

Kalau digambarkan rangkaian ekivalennya :



6.6 Parameter "ABCD"

Parameter ini sering juga disebut sebagai parameter transmisi (*transmission parameters*). Pada sistem parameter ini, tegangan dan arus input dinyatakan / ditinjau dari arus dan tegangan output dengan bentuk persamaan :

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \tag{6.28}$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \tag{6.29}$$

bilamanana Persamaan (28) dan (29) disususun dalam bentuk matrik :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

maka A ; B ; C inilah yang disebut parameter-parameter dari sistem parameter "ABCD", yang satuannya dalam sistem [S], dimana :

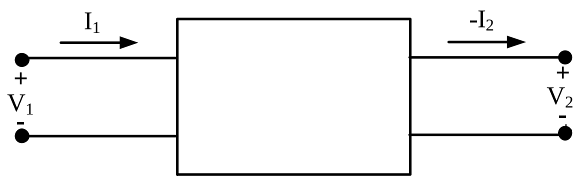
$$\Delta_{ABCD} = \Delta_T = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \tag{6.31}$$

yang disebut sebagai determinan dari parameter "ABCD", dimana dalam keadaan resiprokal berlaku :

$$AD - BC = 1 \tag{6.32}$$

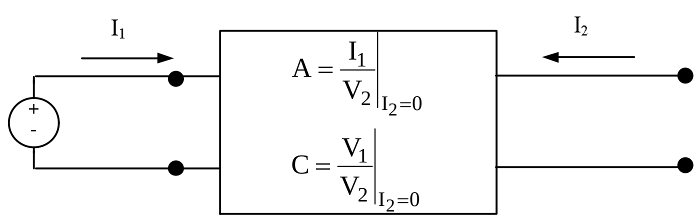
Adapun parameter-parameter dalam Persamaan (6.28) ; (6.29) ; (6.30) memberikan suatu ukuran bagaimana suatu rangkaian memberikan tegangan dan arus dari suatu sumber ke beban yang digunakan dalam analisa pada jaringan transmisi (kabel dan fiber) karena parameter-parameter ini mengekspresikan variable-variabel pada sisi pengirim (V_1 dan I_1) yang dipandang dari veriabel-variabel sisi penerima (V_2 dan $-I_2$). Oleh karena hal ini parameter "ABCD" sering juga disebut sebagai parameter transmisi yang banyak dipergunakan dalam perencanaan sistem telepon, microwave dan radar.

Persamaan (6.28) dan (6.29) menyatakan hubungan antara variable-variabel input (V_1 dan I_1) dengan variable-variabel output (V_2 dan $-I_2$), maka sewaktu menghitung parameter-parameter "ABCD" lebih baik menggunakan tanda aljabar $-I_2$ daripada I_2, hal ini disebabkan karena arus I_2 yang sebenarnya adalah meninggalkan rangkaian.



Gambar 6.20 Variabel terminal dalam parameter ABCD

Untuk menetukan A dan C, maka buka terminal output dan pasangkan sumber tegangan V_1 pada terminal input seperti tergambar pada Gambar 6.21. di bawah ini :



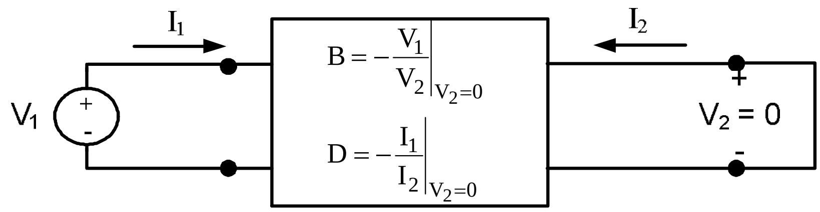
Gambar 6.21. Rangkaian untuk menentuka A dan C dari parameter "ABCD"

Sehingga :

$$A = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \tag{6.33}$$

$$C = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \tag{6.34}$$

Sedangkan untuk mendapatkan B dan D, hubung singkat terminal output dan pasangakan sumber tegangan V_1 pada terminal input seperti terlihat pada Gambar 6.22.



Gambar 6.22 Rangkaian untuk menentukan B dan D pada parameter "ABCD"

Secara matematis ditulis :

$$B = -\frac{V_1}{V_2}\Big|_{V_2=0} \tag{6.35}$$

$$D = -\frac{I_1}{I_2}\Big|_{V_2=0} \tag{6.36}$$

dimana parameter-parameter :

A = sering disebut sebagai perbandingan tegangan rangkaian terbuka (*open-circuit voltage ratio*)

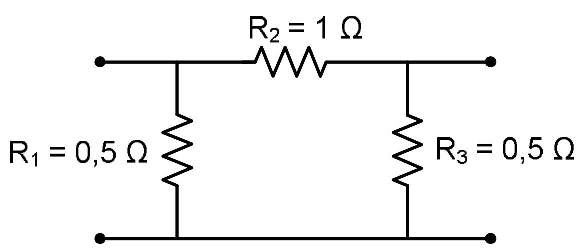
B = sering disebut sebagai transfer impedansi negatif rangkaian hubung singkat.

C = sering disebut sebagai transfer admitansi rangkaian terbuka (*open-circuit transfer adimtance*)

D = sering disebut sebagai perbandingan arus negatif rangkaian hubung singkat (*negative short-circuit ratio*)

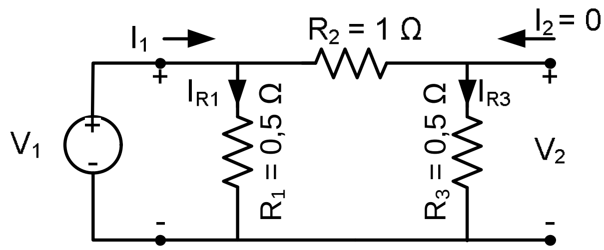
<u>Contoh :</u>

Carilah parameter "ABCD" dari rangkaian di bawah ini :



<u>Jawab :</u>

Untuk menghitung A dan C, pasangkan sumber tegangan V_1 pada terminal input sedangkan terminal output dibuka seperti rangkaian di bawah ini :



dari rangkaian di atas terlihat bahwa :

$$I_{R_1} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.I_1 = \frac{1 + 0,5}{0,5 + 1 + 0,5}.I_1 = 0,75.I_1 \text{ Amp}$$

$$I_{R_3} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}.I_1 = \frac{0,5}{0,5 + 1 + 0,5}.I_1 = 0,25.I_1 \text{ Amp}$$

sehingga :

$$V_1 = R_1.I_{R_1} = 0,5 \text{ x } 0,75.I_1 = 0,375.I_1 \qquad (*)$$

$$V_2 = R_3.I_{R_3} = 0,5 \text{ x } 0,25.I_1 = 0,125.I_1 \qquad (**)$$

dengan demikian :

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{0,375.I_1}{0,125.I_1} = 3$$

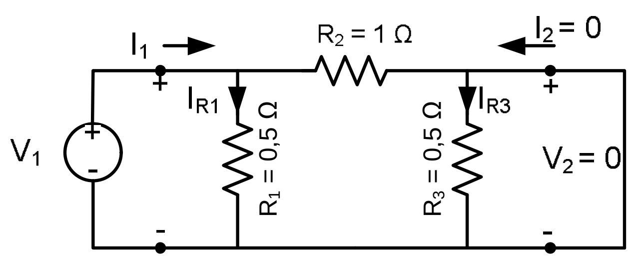
Dari (**) diperoleh :

$$I_1 = \frac{V_2}{0,125} = 8.V_2$$

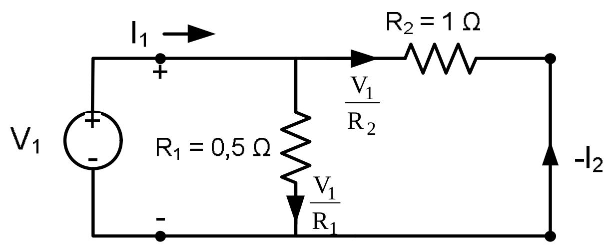
sehingga :

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \frac{8.V_2}{V_2} = 8 \text{ S}$$

Untuk mencari B dan D, maka terminal output dihubung singkat, sedangkan V_1 dipasangkan pada terminal input.



sehingga rangkaian ekivalennya menjadi :



maka :

$$V_1 = R_2 \times (-I_2) = 1.(-I_2) = -I_2 \qquad (***)$$

sehingga :

$$B = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = -\frac{-I_2}{I_2} = 1\ \Omega$$

selanjutnya terlihat :

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1}{R_2} = \frac{V_1}{0{,}5} + \frac{V_1}{1} = 3.V_1$$

dari (***) yang di dapat, maka :

$$I_1 = 3.V_1 = 3 \times (-I_2) = -3.I_2$$

sehingga :

$$D = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} = \frac{-3.I_2}{I_2} = 3$$

6.7 Parameter "abcd"

Adapun parameter rangkaian kutub empat yang terakhir dikenal dengan parameter "abcd", yang mana parameter ini disebut sebagai inverse dari parameter "ABCD". Pada parameter "abcd" ini tegangan dan arus outputnya dinyatakan dalam tegangan dan arus input yang persamaannya berbentuk sebagai berikut :

$$V_2 = aV_1 - bI_1 \qquad (6.37)$$

$$I_2 = cV_1 - dI_1 \qquad (6.38)$$

yang dalam bentuk matrik dituliskan dengan :

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \qquad (6.39)$$

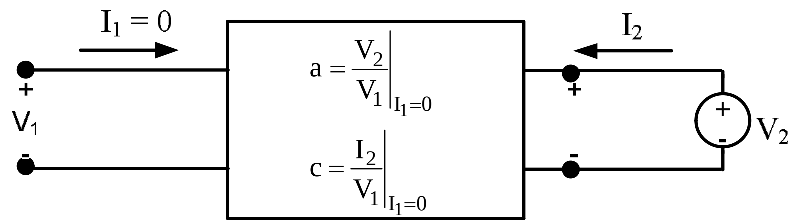
yang diterminan dinyatakan dengan :

$$\Delta_{abcd} = \Delta_t = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c \qquad (6.40)$$

dan bilamana kutub empat ini bersifat resiprokal, maka berlaku :

$$a.d - b.c = 1 \tag{6.41}$$

Selanjutnya untuk menghitung a dan c, maka terminal input dibuka sedangkan pada terminal output dipasangkan sumber tegangan V_2, yang rangkaiannya terlihat pada Gambar 6.23 di bawah ini :



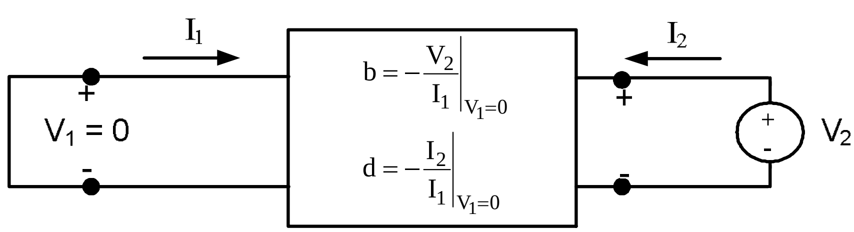
Gambar 6.23 Rangkaian untuk menentuka a dan c dari parameter “abcd”

Secara matematis dituliskan dengan :

$$a = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_1=0} \tag{6.42}$$

$$c = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{I_1=0} \tag{6.43}$$

Selanjutnya untuk mencari b dan d, hubung singkat terminal input dan pasang sumber tegangan V_2 pada terminal output, yang rangkaiannya seperti Gambar 6.24 di bawah ini :



Gambar 6.24 Rangkaian untuk menentukan b dan d pada parameter “abcd”

Secara matematis dituliskan dengan :

$$b = -\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0} \tag{6.44}$$

$$d = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_1=0} \qquad (6.45)$$

dimana parameter-parameter :

a = disebut sebagai penguat tegangan rangkaian terbuka (*open-circuit voltage gain*)

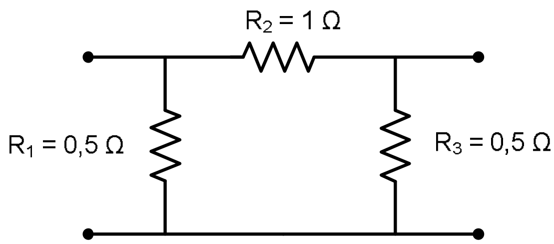
b = disebut sebagai negative impedansi transfer rangkaian hubung singkat. (*negative short-circuit transfer impedance*)

c = transfer admitansi rangkaian terbuka (*open-circuit transfer adimtance*)

d = penguat arus negatif rangkaian hubung singkat (*negative short-circuit gain*)

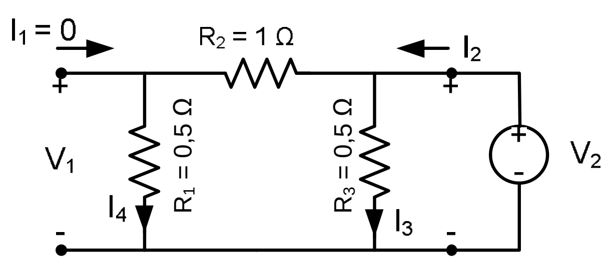
Contoh :

Carilah parameter “abcd” dari rangkaian di bawah ini :



Jawab :

Untuk mencari a dan c, pasangkan sumber tegangan V_2 pada terminal output dan buka terminal input seperti rangkaian di bawah ini :



dari rangkaian dapat dihitung :

$$I_4 = \frac{V_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_2}{0{,}5 + 1} = \frac{2}{3} V_2 \text{ Amp}$$

maka :

$$V_1 = I_4 \text{ x } R_1 = \frac{2.V_2}{3} \text{ x } 0{,}5 = \frac{V_2}{3}$$

sehingga :

$$V_1 = \frac{V_2}{3}$$

maka :

$$a = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_1=0} = \frac{V_2}{V_2/3} = 3$$

dari rangkaian juga terlihat :

$$I_2 = I_3 + I_4 = \frac{V_2}{R_3} + \frac{2}{3}V_2 = \frac{V_2}{0{,}5} + \frac{2}{3}V_2 = \frac{8V_2}{3}$$

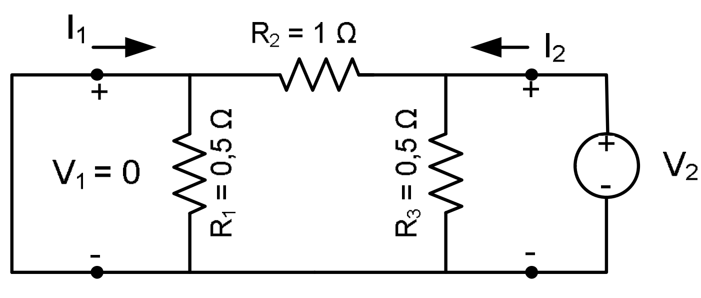
sehingga :

$$I_2 = \frac{8V_2}{3}$$

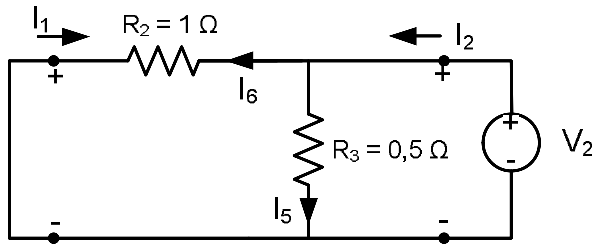
maka :

$$c = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{I_1=0} = \frac{8V_2/3}{V_2/3} = 8\ \mathrm{S}$$

Selanjtunya untuk mencari b dan d, maka hubung singkat input, sedangkan output tetap dengan sumber tegangan V_2 seperti pada rangkaian di bawah ini :



sehingga rangkaian ekivalen di atas berbentuk :



dari rangkaian terlihat bahwa :

$$V_2 = R_2.I_6 = 1.I_6 = I_6 \qquad (*)$$

akan tetapi karena : $I_6 = -I_1$, maka persamaan (*) menjadi :

$$V_2 = -I_1$$

dengan demikian :

$$b = -\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0} = -\frac{-I_1}{I_1} = 1\ \Omega$$

Selanjutnya dari rangkaian juga terlihat :

$$I_2 = I_5 + I_6 = \frac{V_2}{R_3} + I_6 \qquad (**)$$

akan tetapi karena : $V_2 = -I_1$ dan $I_6 = -I_1$, maka persamaan (**) menjadi :

$$I_2 = \frac{V_2}{R_3} - I_1 = \frac{-I_1}{0,5} - I_1 = -3.I_1$$

dengan demikian di dapat :

$$d = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_1=0} = -\frac{-3.I_1}{I_1} = 3$$

6.8 Konversi Antar Parameter

Sebagaimana seperti telah dibahas di depan, bahwa pada rangkaian kutub empat ada 6 (enam) parameter yang memperlihatkan hubungan antara input dan output. Akan tetapi pada suatu saat bila diketahui satu jenis parameter dari suatu rangkaian dan untuk rangkaian yang sama diperlukan pula jenis parameter lainnya, maka untuk itu diperlukan pengkonversian parameter suatu rangkaian ke parameter lainnya. Misalkan suatu rangkaian kutub empat dengan parameter "z" dengan persamaan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

atau dapat dibuat :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}{[z]} = \frac{1}{[z]} x \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

atau :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

Selanjutnya pada parameter “y” diketahui bentuk persamaannya adalah :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

atau :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

Kemudian dengan membandingkan Persamaan (6.46) dan (6.47) terlihat bahwa :

$$[y] = [z]^{-1} \tag{6.48}$$

selanjutnya adapun adjoint dari $[z]$ adalah :

$$\text{adj } [z] = \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

yang diterminannya adalah :

$$\Delta z = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}$$

maka :

$$[z]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta z}$$

kemudian substitusikan $[z]^{-1}$ ini kedalam Persamaan (6.48) sehingga diperoleh :

$$[y] = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta z} \tag{6.49}$$

Sebagaimana diketahui bahwa :

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

bilamana Persamaan (6.50) disubtitusikan kedalam Persamaan (6.49) diperoleh :

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta z} \tag{6.51}$$

maka dari Persamaan (6.51) ini terlihat :

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta z}$$

$$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta z}$$

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta z}$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta z}$$

Demikianlah seterusnya untuk parameter lainnya, yang lengkapnya terlihat hasilnya seperti tabel berikut ini.

Tabel 6.1 Konversi Dari Kutub Empat

	z	**y**	**h**	**g**	**T**	**t**
z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ \frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta g}{g_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta_T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{d}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{\Delta_t}{c} & \frac{a}{c} \end{matrix}$
y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & -\frac{z_{12}}{\Delta_z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_g}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta_T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{a}{b} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{\Delta_t}{b} & \frac{d}{b} \end{matrix}$

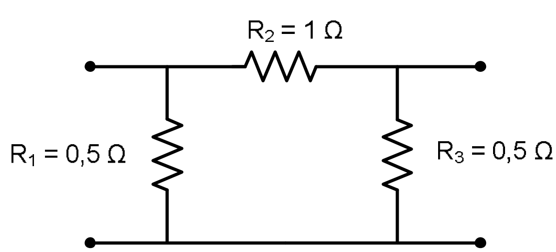
h	$\begin{matrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_y}{y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{g_{22}}{\Delta_g} & -\frac{g_{12}}{\Delta_g} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta_g} & \frac{g_{11}}{\Delta_g} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta_T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{\Delta_t}{a} & \frac{c}{a} \end{matrix}$
g	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta_z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta_h} & -\frac{h_{12}}{\Delta_h} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta_h} & \frac{h_{11}}{\Delta_h} \end{matrix}$	$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{C}{A} & -\frac{\Delta_T}{A} \\ \frac{1}{A} & \frac{B}{A} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{c}{d} & -\frac{1}{d} \\ \frac{\Delta_t}{d} & -\frac{b}{d} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta_z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta_y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{g_{21}} & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta_g}{g_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{d}{\Delta_t} & \frac{b}{\Delta_t} \\ \frac{c}{\Delta_t} & \frac{a}{\Delta_t} \end{matrix}$
t	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta_z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta_y}{y_{12}} & -\frac{y_{22}}{y_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta_h}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_g}{g_{12}} & -\frac{g_{22}}{g_{12}} \\ -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{\Delta_T} & \frac{B}{\Delta_T} \\ \frac{C}{\Delta_T} & \frac{A}{\Delta_T} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

Dimana : $\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ $\quad \Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$ $\quad \Delta_T = AD - BC$

$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$ $\quad \Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ $\quad \Delta_t = ad - bc$

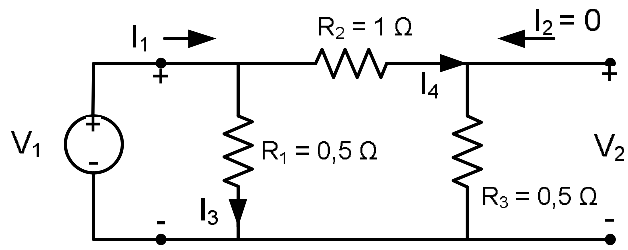
Contoh :

Carilah parameter-parameter "z" dari rangkaian di bawah ini, dan kemudian berdasarkan parameter "z" yang diperoleh dengan bantuan tabel, carilah parameter-parameter "y" ; "h" ; "g" ; "ABCD" dan parameter "abcd".



Jawab :

Untuk mendapatkan z_{11} dan z_{21}, maka pasangkan sumber tegangan V_1 pada terminal input dan terminal output terbuka.



maka dari rangkaian terlihat :

$$R_2 \text{ seri } R_3 \quad \rightarrow \quad R_{S1} = R_2 + R_3 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\ \Omega$$

sehingga :

$$I_3 = \frac{R_{S1}}{R_1 + R_{S1}}.I_1 = \frac{1{,}5}{0{,}5 + 1{,}5}.I_1 = 0{,}75.I_1$$

maka :

$$V_1 = I_3.R_1 = 0{,}75.\,I_1 \text{ x } 0{,}5 = 0{,}375.I_1$$

sehingga :

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0{,}375.I_1}{I_1} = 0{,}375\,\Omega$$

dari rangkaian dapat dihitung :

$$I_4 = \frac{R_1}{R_1 + R_{S1}}.I_1 = \frac{0{,}5}{0{,}5 + 1{,}5}.I_1 = 0{,}25.I_1$$

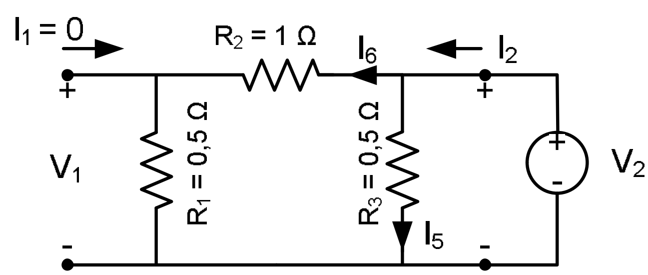
maka :

$$V_2 = I_4.R_3 = 0{,}25.\,I_1 \text{ x } 0{,}5 = 0{,}125.I_1$$

sehingga :

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0{,}125.I_1}{I_1} = 0{,}125\,\Omega$$

Untuk mendapatkan z_{12} dan z_{22}, maka pasang sumber tegangan V_2 pada terminal output sedang terminal input dibuka.



maka terlihat dari rangkaian bahwa :

$$R_2 \text{ seri } R_1 \quad \rightarrow \quad R_{S2} = R_2 + R_1 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\ \Omega$$

sehingga :

$$I_5 = \frac{R_{S2}}{R_1 + R_{S2}}.I_2 = \frac{1,5}{0,5+1,5}.I_2 = 0,75.I_2$$

maka :

$$V_2 = I_5.R_3 = 0,75.\,I_2 \text{ x } 0,5 = 0,375.I_2$$

sehingga :

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{0,375.I_2}{I_2} = 0,375\Omega$$

dari rangkaian dapat dihitung :

$$I_6 = \frac{R_3}{R_1 + R_{S2}}.I_2 = \frac{0,5}{0,5+1,5}.I_2 = 0,125.I_2$$

maka :

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{0,125.I_2}{I_2} = 0,125\Omega$$

sedangkan :

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = [(0,375 \text{ x } 0,375) - (0,125 \text{ x } 0,125)] = 0,125\ \Omega^2$$

Parameter "y"

Dari table konversi dapat dilihat hubungan antara parameter "z" dengan parameter "y", sebagai berikut :

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z} = \frac{0,375\ \Omega}{0,125\Omega^2} = 3\text{ S}$$

$$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z} = -\frac{0,125\ \Omega}{0,125\Omega^2} = -1\text{ S}$$

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_z} = -\frac{0,125\ \Omega}{0,125\Omega^2} = -1\text{ S}$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z} = \frac{0,375\ \Omega}{0,125\Omega^2} = 3\text{ S}$$

Parameter "h"

Dari table konversi dapat dilihat hubungan antara parameter "z" dengan parameter "h", sebagai berikut :

$$h_{11} = \frac{\Delta_z}{z_{22}} = \frac{0{,}125\ \Omega^2}{0{,}375\Omega} = 0{,}333\ \Omega$$

$$h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = \frac{0{,}125\ \Omega^2}{0{,}375\Omega} = 0{,}333\ \ \Omega$$

$$h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = -\frac{0{,}125\ \Omega^2}{0{,}375\Omega} = -0{,}333\ \ \Omega$$

$$h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{1}{0{,}375\Omega} = 2{,}666\mathrm{S}$$

Parameter "g"

Dari table konversi dapat dilihat hubungan antara parameter "z" dengan parameter "g", sebagai berikut :

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{1}{0{,}375\Omega} = 2{,}666\ \mathrm{S}$$

$$g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} = -\frac{0{,}125\Omega}{0{,}375\Omega} = -0{,}333$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{0{,}125\Omega}{0{,}375\Omega} = 0{,}333$$

$$g_{22} = \frac{\Delta_z}{z_{11}} = \frac{0{,}125\Omega^2}{0{,}375\Omega} = 0{,}333\Omega$$

Parameter "ABCD"

Dari table konversi dapat dilihat hubungan antara parameter "z" dengan parameter "ABCD", sebagai berikut :

$$A = \frac{z_{11}}{z_{21}} = \frac{0{,}375\Omega}{0{,}125\Omega} = 3$$

$$B = \frac{\Delta_z}{z_{21}} = \frac{0{,}125\Omega^2}{0{,}125\Omega} = 1\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{z_{21}} = \frac{1}{0{,}125\Omega} = 8\ \mathrm{S}$$

$$D = \frac{z_{22}}{z_{21}} = \frac{0{,}375\Omega}{0{,}125\Omega} = 3$$

Parameter "abcd"

Dari table konversi dapat dilihat hubungan antara parameter “z” dengan parameter “abcd”, sebagai berikut :

$$a = \frac{z_{22}}{z_{12}} = \frac{0{,}375\Omega}{0{,}125\Omega} = 3$$

$$b = \frac{\Delta_z}{z_{12}} = \frac{0{,}125\Omega^2}{0{,}125\Omega} = 1\ \Omega$$

$$c = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{0{,}125\Omega} = 8\ S$$

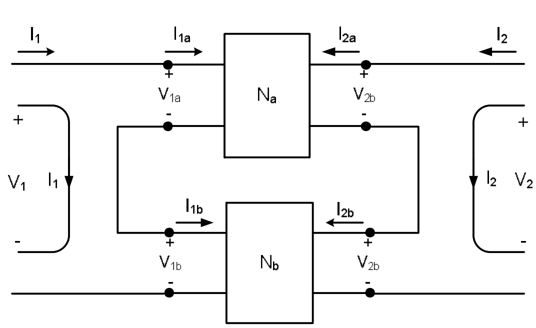
$$a = \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{0{,}375\Omega}{0{,}125\Omega} = 3$$

6.9 Interkoneksi Antar Kutub Empat

Bertambah besar dan kompleksnya suatu sistem, maka untuk perencanaan / penganalisaan mangakibatkan sistem tersebut dibagi menjadi beberapa bagian kutub empat yang mungkin dihubungkan secara seri, paralel dan kaskade.

Walaupun interkoneksi dapat dilakukan untuk setiap parameter, tetapi untuk interkoneksi suatu jenis parameter akan memiliki keuntungan tertentu, misalnya untuk hubungan seri maka parameter “z” akan menghasilkan suatu sistem yang besar dengan parameter “z”, demikian pula dengan hubungan parallel parameter “y” dan hubungan kaskade dari parameter “ABCD”

6.9.1 Kutub Empat dengan Hubungan Seri



Gambar 6.25 Hubungan seri dua rangkaian kutub empat

Pada gambar di atas terlihat bahwa dua kutub empat, masing-masing N_a dan N_b, maka arus inputnya adalah sama sedangkan tegangan input saling dijumlahkan.

Untuk N_a :

$$\left.\begin{aligned} V_{1a} &= z_{11a} I_{1a} + z_{12a} I_{2a} \\ V_{2a} &= z_{21a} I_{1a} + z_{22a} I_{2a} \end{aligned}\right\} \qquad (6.52)$$

Untuk N_b :

$$\left.\begin{aligned} V_{1b} &= z_{11b} I_{1b} + z_{12b} I_{2b} \\ V_{2b} &= z_{21b} I_{1b} + z_{22b} I_{2b} \end{aligned}\right\} \qquad (6.53)$$

dengan :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} = I_{1b} \\ I_2 &= I_{2a} = I_{2b} \end{aligned}\right\} \qquad (6.54)$$

dan :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_{1a} + V_{1b} = (z_{11a} + z_{11b})\, I_1 + (z_{12a} + z_{12b}) I_2 \\ V_2 &= V_{2a} + V_{2b} = (z_{21a} + z_{21b}) I_1 + (z_{22a} + z_{22b}) I_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.55)$$

maka parameter "z" dari dua kutub empat yang di serikan adalah :

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \qquad (6.56)$$

atau :

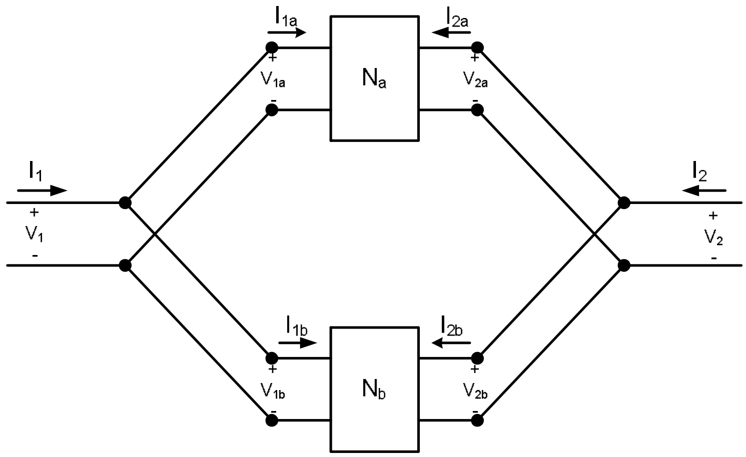
$$[z] = [z_a] + [z_b] \qquad (6.57)$$

maka terlihat bahwa parameter-parameter "z" untuk keseluruhan adalah jumlah dari parameter-parameter dari setiap kutub empat yang terhubung secara seri dan ini berlaku untuk ***n*** kutub empat yang terhubung secara seri.

Misalnya kalau dua buah kutub empat dengan parameter "h" dihubungkan secara seri, maka parameter "h" terlebih dahulu dikonversikan menjadi parameter "z" (dengan bantuan tabel) ke parameter "h".

6.9.2 Kutub Empat dengan Hubungan Paralel

Dua buah kutub empat dapat dihubungkan paralel apabila setiap tegangan terminal (input dan output) harus sama dan arus yang dihasilkan adalah jumlah setiap arus dari masing-masing kutub empat.



Gambar 6.26 Hubungan paralel dari dua buah rangkaian kutub empat

Dalam hubungan ini berlaku :

$$\left.\begin{aligned} I_{1a} &= y_{11a}V_{1a} + y_{12a}V_{2a} \text{ ....(a)} \\ I_{2a} &= y_{21a}V_{1a} + y_{22a}V_{2a} \text{ ......(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.58)$$

dan :

$$\left.\begin{aligned} I_{1b} &= y_{11b}V_{1b} + y_{12b}V_{2b} \text{ ....(a)} \\ I_{2b} &= y_{21b}V_{1b} + y_{22b}V_{2b} \text{ ......(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.59)$$

dari rangkaian Gambar 6.26, terlihat :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_{1a} + V_{1b} \text{ ....(a)} \\ V_2 &= V_{2a} + V_{2b} \text{ .....(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.60)$$

dan :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} + I_{1b} \text{ ....(a)} \\ I_2 &= I_{2a} + I_{2b} \text{ .....(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Kemudian jumlahkan Pesamaan (6.58a) dengan Persamaan (6.59a) dan demikian pula Persamaan (6.58b) dengan Persamaan (6.59b) yang akan menghasilkan :

$$\left.\begin{aligned} I_{1a} + I_{1b} &= y_{11a}V_{1a} + y_{12a}V_{2a} + y_{11b}V_{1b} + y_{12b}V_{2b} \text{ ....(a)} \\ I_{2a} + I_{2b} &= y_{21a}V_{1a} + y_{22a}V_{2a} + y_{21b}V_{1b} + y_{22b}V_{2b} \text{..........(b)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.62)$$

dengan melihat kepada Persamaan (6.60) dan (6.61) maka Persamaan (6.52) menjadi :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= (y_{11a} + y_{11b})V_1 + (y_{12a} + y_{12b})V_2 \text{ ....(a)} \\ I_2 &= (y_{21a} + y_{21b})V_1 + (y_{22a} + y_{22b})V_2 \text{...........(b)} \end{aligned}\right\} \tag{6.63}$$

maka untuk kutub empat dengan parameter "y" yang terhubung paralel berlaku :

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

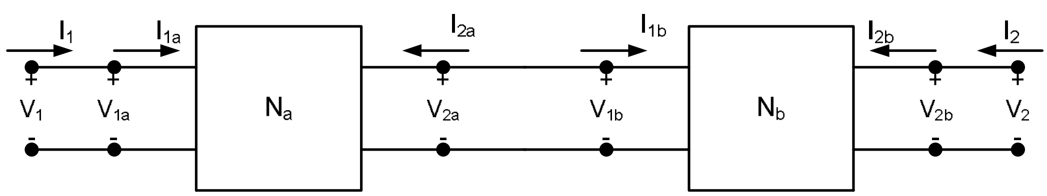
atau :

$$[y] = [y_a] + [y_b] \tag{6.65}$$

maka terlihat bahwa untuk hubungan paralel dari dua buah kutub empat parameter "y", menghasilkan parameter ekivalen "y" yang merupakan jumlah dari setiap parameter kedua kutub empat dan ini juga berlaku untuk ***n*** kutub empat yang terhubung secara paralel.

6.9.3 Kutub Empat dengan Hubungan Kaskade

Dua buah kutub empat dikatakan dalam hubungan kaskade bilamana output sebuah kutub empat merupakan input kutub empat yang lain, yang rangkaiannya seperti Gambar 6.27 di bawah ini :



Gambar 6.27 Dua rangkaian kutub empat dalam hubungan kaskade

Persamaan dari kedua kutub empat dalam parameter "ABCD" adalah :

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \tag{6.66}$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} \tag{6.67}$$

dari rangkaian pada Gambar 6.27 terlihat bahwa :

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \text{..................(a)} \\
\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} \text{.............(b)} \\
\begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \text{............(c)}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.68)$$

Selanjutnya apabila Persamaan (6.68) ini disubstitusikan kedalam Persamaan (6.66) dan (6.67), akan diperoleh :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad (6.69)$$

sehingga apabila dua parameter "ABCD" dihubungkan kaskade, maka parameter keseluruhan adalah merupakan hasil perkalian dari setiap parameter yang dihubungkan secara kaskade tersebut, atau dituliskan dengan :

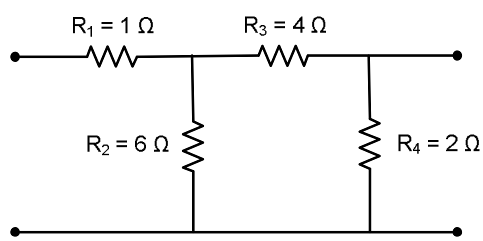
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \qquad (6.70)$$

atau :

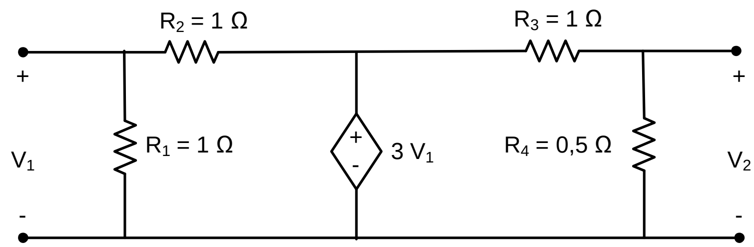
$$[T] = [T_a] + [T_b] \qquad (6.71)$$

6.10 Soal Latihan

1. Hitunglah parameter z dari rangkaian di bawah ini.



2. Carilah parameter z dari rangkaian di bawah ini.



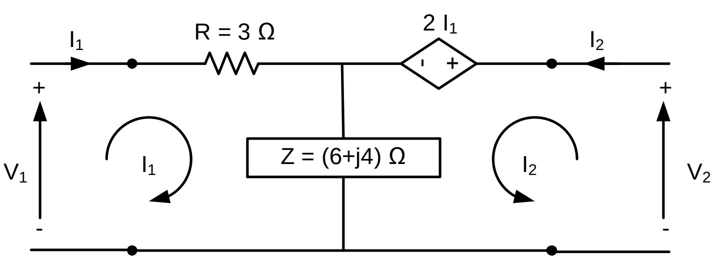
3. Suatu rangkaian kutub empat memiliki persamaan (untuk sementara asumsikan bukan persamaan dari suatu parameter) :

$$I_1 = 0{,}2\ V_1 - 0{,}05\ V_2$$

$$I_2 = -0{,}05\ V_1 + 0{,}1\ V_2$$

Carilah parameter z dari rangkaian tersebut.

4. Carilah parameter z dari rangkaian di bawah ini.

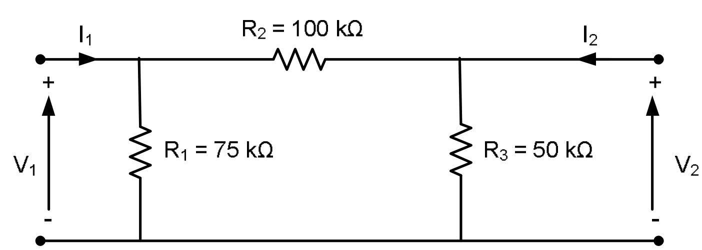


5. Dari hasil percobaan rangkaian terbuka dari suatu rangkaian kutub empat yang tidak diketahui bentuknya diperoleh :

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 100\angle 0^\circ\,\mathrm{V} \\ V_2 &= 75\angle 0^\circ\,\mathrm{V} \\ I_1 &= 12{,}5\angle 0^\circ\,\mathrm{A} \end{aligned}\right|_{I_2=0} \quad \text{dan} \quad \left.\begin{aligned} V_1 &= 30\angle 0^\circ\,\mathrm{V} \\ V_2 &= 50\angle 0^\circ\,\mathrm{V} \\ I_2 &= 5\angle 0^\circ\,\mathrm{A} \end{aligned}\right|_{I_1=0}$$

Carilah parameter z dari kutub empat tersebut.

6. Carilah parameter y dari rangkaian di bawah ini.

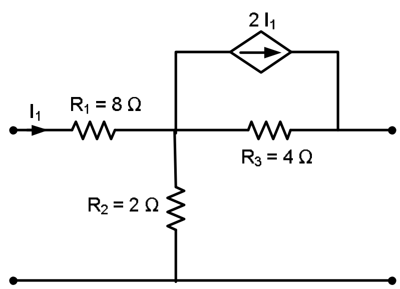


7. Dari hasil percobaan hubung singkat pada suatu kutub empat yang tidak diketahui bentuknya diperoleh :

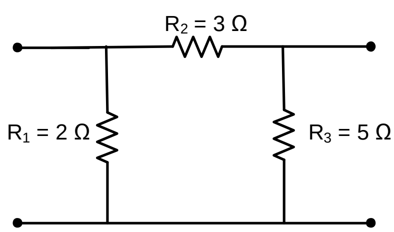
$$\left.\begin{aligned} I_1 &= 3\,\text{mA} \\ I_2 &= -0{,}6\,\text{mA} \\ V_1 &= 24\,\text{V} \end{aligned}\right|_{V_2=0} \quad \text{dan} \quad \left.\begin{aligned} I_1 &= -1\,\text{mA} \\ I_2 &= 12\,\text{mA} \\ V_2 &= 40\,\text{V} \end{aligned}\right|_{V_1=0}$$

Carilah parameter y dari kutub empat tersebut.

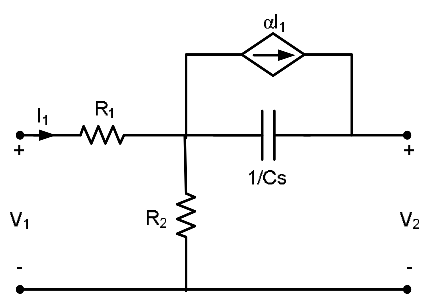
8. Dari rangkaian di bawah ini carilah parameter y.



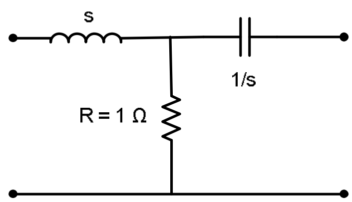
9. Carilah parameter h dari rangkaian di bawah ini.



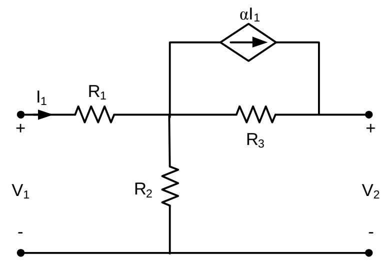
10. Carilah parameter h dari rangkaian di bawah ini.



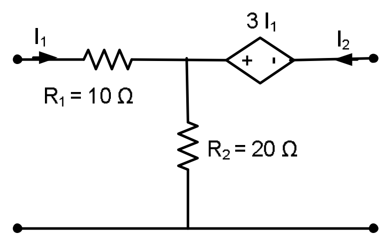
11. Carilah parameter g dari rangkaian di bawah ini.



12. Carilah g_{12} dan g_{21} dari rangkaian di bawah ini.



13. Carilah parameter ABCD dari rangkaian kutub empat di bawah ini.



14. Carilah parameter ABCD dari rangkaian kutub empat di bawah ini.