BAB 5

PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN ORDE TINGGI

5.1 Pendahuluan

Metode penyelesaian persamaan diferensial orde satu dan dua yang telah dibahas dapat dipergunakan untuk persamaan diferensial homogen untuk orde *n* dengan persamaan karakteristik seperti di bawah ini :

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (5.1)$$

menurut teorema dasar aljabar menyatakan bahwa sebuah persamaan diferensial orde *n* yang memiliki akar-akar sebanyak *n* dimana akar-akar ini bisa didapat dengan cara memfaktorkan Persamaan (173) sebagai berikut :

$$a_0 (s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n) = 0 \qquad (5.2)$$

dimana setiap akar s_1, s_2, …, s_n akan menimbulkan faktor $K_1 \varepsilon^{s_1 t}$ dalam penyelesaiannya, diamana jumlah semua faktor akan membentuk penyelesaian persamaan diferensial, sehingga penyelesaian suatu persamaan diferensial homogen untuk orde *n*, akan memiliki bentuk misalkan sebagai berikut :

$$i = K_1 \varepsilon^{s_1 t} + K_1 \varepsilon^{s_2 t} + ... + K_1 \varepsilon^{s_{n-1}} + K_1 \varepsilon^{s_n} \qquad (5.3)$$

sehingga yang menjadi permasalahan dalam penyelesaian persamaan diferensial homogen orde *n* adalah mencari akar-akar dari persamaan karaktersitik persamaan diferensial tersebut.

Akan tetapi ada beberapa penyerdahaan dalam mencari akar-akar persamaan ini karena koefisien-koefisien Persamaan (5.1) adalah koefisien riil dan positif, hal ini disebabkan koefisien-koefisien ini terbentuk dari parameter rangkaian, yaitu R, L dan C, dan karena R, L dan C dianggap riil dan positif, maka koefisien a dari Persamaan (5.1) menjadi riil dan positif juga. Ada tiga kemungkinan yang bisa terjadi pada akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut :

1. Akar-akar persamaan karakteristik merupakan akar yang riil.
2. Akar-akar persamaan karakteristik merupakan akar yang imajiner.
3. Akar-akar persamaan karakteristik merupakan akar yang kompleks.

5.2 Persamaan Karakteristik Orde Satu

Misalkan persamaan karakteristik berbentuk sebagai berikut :

$$a_0 s + a_1 = 0 \tag{5.4}$$

maka akar persamaan ini adalah :

$$s = -\frac{a_1}{a_0} \tag{5.5}$$

maka akar ini selalu riil dan negatif karena a_0 dan a_1 selalu riil dan positif.

5.3 Persamaan Karakteristik Orde Dua

Misalkan persamaan karakteristik berbentuk sebagai berikut :

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \tag{5.6}$$

atau :

$$s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + \frac{a_2}{a_0} = 0 \tag{5.7}$$

maka akar-akar Persamaan (5.7) ini adalah :

$$s1, s2 = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{1}{2a_0}\sqrt{a_1^{\,2} - 4.a_0.a_2} \tag{5.8}$$

disini akar-akar ini bisa riil, imajiner atau kompleks dan kalau akar-akarnya kompleks haruslah merupakan kompleks sekawan/konjugasi.

5.4 Persamaan Karakteristik Orde Tiga

Akar-akar persamaan karakteristik merupakan sepasang, sepasang akar-akar kompleks sekawan, ataupun setidak-tidaknya satu akarnya harus riil dan yang duanya lainnya, bisa kedua-duanya riil atau pasangan konjugasi akar-akar sekawan.

5.5 Persamaan Karakteristik Orde Empat

Dalam hal ini ada beberapa kemungkinan :

a. Ke-empat akarnya riil
b. Dua riil dan sepasang kompleks sekawan
c. Dua pasang akar kompleks sekawan

Ada beberapa aturan dapat dipergunakan yang berhubungan dengan akar-akar tersebut, yaitu :

1. Apabila akar-akarnya kompleks sekawan, maka akarnya dalam bentuk pasangan sekawan.
2. Bilamana persamaan karakteristik ber-orde ganjil, paling sedikit satu akar riil dan sisanya bisa riil atau dalm pasangan kompleks sekawan.
3. Bilamana persamaan karakteristik ber-orde genap, akar-akarnya bisa riil atau pasangan kompleks sekawan.

Sebagai ringkasnya, sebuah persamaan dengan orde berapapun dapat difaktorkan menurut akar-akarnya, dimana akar-akar menentukan panyelesaian diferensial homogen sebagai jumlah penyelesaian orde pertama atau orde kedua yang telah dibahas sebelumnya.

5.6 Penyelesaian Persamaan Diferensial Tidak Homogen

Sebagaimana telah diketahui bahwa suatu persamaan diferensial dikatakan tidak homogen apabila ruas kanan dari persamaan tersebut tidak nol, akan tetapi sama dengan fungsi pemaksa (*forcing function*) atau beberapa turunanya.

Dalam menganalisa persamaan demikian, yang perlu diamati bahwa penyelesaian persamaan diferensial homogen yang bersangkutan adalah bagian dari penyelesaian persamaan diferensial tak homogen. Sebagai ilustrasi perhatikan persamaan tidak homogen linier orde dua di bawah ini :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 10i = v(t) \tag{5.9}$$

penyelesaian persamaan tidak homogen ini mengandung sebagian dari penyelesaian persamaan homogen.

Misalkan v(t) = 0. maka persamaan ini memiliki akar-akar s_1 = -2 dan s_2 = -5, sehingga penyelesaian lengkap dari persamaan ini adalah :

$$i_c = K_1.\varepsilon^{-2t} + K_2.\varepsilon^{-3t} \tag{5.10}$$

Seandainya beberapa fungsi ip yang akan dicari memenuhi persamaan tidak homogen Persamaan (5.9), sehingga (i_p + i_c) juga merupakan penyelesaian dari persamaan tidak homogen dari Persamaan (5.9), karena dengan mensubstitusi $K_1.\varepsilon^{-2t}$ atau $K_2.\varepsilon^{-3t}$ kedalam Persamaan (5.9) tidak akan menambah apapun keruas kanan dari Persamaan.

Sehingga dapat dikatakan penyelesaian persamaan diferensial tidak homogen mengandung penyelesaian dari persamaan diferensial homogen, dimana bagian ini disebut sebagai fungsi komplementer dan sisanya merupakan bagian partikular integral, sehingga total penyelesaian dari persamaan diferensial tidak homogen diberikan oleh :

$$i = i_p + i_c \tag{5.11}$$

Adapun persamaan diferensial dalam rangkaian listrik suku v(t) pada persamaan diferensial adalah gaya penggerak atau turunanya. Adapun tipe bentuk gelombang sebagai fungsi penggerak pada rangkaian listrik adalah misalnya v(t) dapat berupa :

1. Suatu konstanta
2. Berbentuk sin ωt ; cos ωt ; Kt
3. Perkalian dari suku-suku tersebut
4. Kombinasi linier untuk mendapatkan gelombang siku-siku, pulsa dan sebagainya.

Adapun beberapa metode yang dapat dipergunakan untuk mencari partikular integral, kalau fungsi penggerak merupakan seperti yang dimaksud di atas, maka metode koefisien tak-tentu (*method of underemined coefficient*) dapat dipergunakan.

Biasanya pada penggunaan metode koefisien tak-tentu melalui langkah-langkah :

1. Pilih fungsi percobaan dari semua bentuk yang mungkin bisa memenuhi persamaan diferensial seperti pada Tabel 5.1.
2. Setiap fungsi percobaan ditandai koefisien tak-tentu.
3. Jumlah semua fungsi percobaan disubstitusikan kedalam persamaan diferensial, akan diperoleh seperangkat persamaan aljabar linier dengan menyamakan koefisien-koefisien fungsi yang sama dalam persamaan yang dihasilkan dari hasil substitusi tersebut.
4. Koefisien-koefisien tak-tentu, ditentukan oleh pemecahan seperangkat persamaan aljabar tersebut.

Kalau suatu fungsi percobaan tidak menghasilkan suatu penyelesaian, maka koefisiennya adalah nol.

Tabel 5.1 Pilihan Penyelesaian Percobaan

Faktor Dalam v(t) *)	**Pilihan Bagi Integral Khusus** **)
1. V (konstanta)	A
2. $a_1 t^n$	$B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \ldots + B_{n-1} t + B_n$
3. $a_2 \varepsilon^{mt}$	$C\varepsilon^{mt}$
4. $a_3 \cos \omega t$	$D \cos \omega t + E \sin \omega t$
5. $a_4 \sin \omega t$	
6. $a_5.t^n.\varepsilon^{mt} \cos \omega t$	$(F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \ldots + F_{n-1} t + F_n)\, \varepsilon^{mt} \cos \omega t +$
7. $a_6.t^n.\varepsilon^{mt} \sin \omega t$	$(G_0 t^n + G_1 t^{n-1} + \ldots + G_{n-1} t + G_n)\, \varepsilon^{mt} \sin \omega t$

*)	Bilamana v(t) terdiri dari jumlah beberapa suku, maka integral khusus yang tepat adalah jumlah integral khusus bersesuaian/padanan masing-masing suku itu sendiri-sendiri.
**)	Bilamana sebuah suku dari integral yang dicoba manapun yang tertera dalam kolom ini telah merupakan bagian fungsi komplementer dari persamaan yang diberikan, maka perlu diadakan modifikasi pilihan yang ditunjukan dengan mengalikannya dengan t sebelum digunakan. Bila suku yang demikian muncul sebanyak *m* kali dalam funsi komplementer, maka pilihan yang ditunjukan harus dikalikan dengan t^m.

Dalam menggunakan Tabel 5.1, ada beberapa langkah yang perlu diperhatikan :

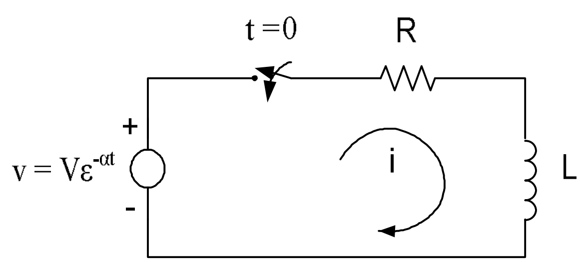
1. Tentukan fungsi komplementer i_c. Kemudian bandingkan setiap bagian fungsi komplementer dengan bentuk v(t). Aturan pada Tabel 5.1, dimodifikasi bilamana kedua fingsi ini memiliki suku-suku dengan bentuk matematik yang sama.
2. Tuliskan bentuk integral khusus yang dicoba, dengan menggunkan Tabel 5.1. Setiap penyelesaian yang dicoba yang berbeda harus diberikan koefisien huruf yang berbeda, dan semua fungsi yang sama harus digabungkan.
3. Substitusikan hasil penyelesaian yang dicoba kedalam persamaan diferensial, dan dengan menyamakan koefisien dari semua suku yang sama, bentuk seperangkatan persamaan aljabar dalam koefisien yang tak-tentu.

4. Carilah koefisien tak-tentu dan dengan demikian integral khusus didapat, koefisien-koefisien ini harus dinyatakan dalam parameter rangkaian dan gaya penggerak/sumber, dan tidak ada konstanta sembarang dalam integral khusus.

Setelah integral khusus diperoleh, maka penyelesaian total didapat dengan menjumlahkan fungsi komplementer dengan integral khusus, dan bila diperlukan penyelesaian khusus, maka konstanta sembarang dari fungsi komplementer (i_c) bisa dihitung dengan menggunakan kondisi awal. Perlu diperhatikan, kondisi awal harus selalu diterapkan pada penyelesaian total dan jangan hanya pada fungsi komplementer saja kecuali $i_p = 0$. [bila v(t) = 0]

5.7 Response RL Seri Dengan Input Fungsi Eksponensial

Rangkaian di bawah ini dengan sumber tegangan berbentuk : $v = V\varepsilon^{-\alpha t}$



Gambar 5.1 Rangkaian RL seri dengan sumber fungsi ekponensial

Dimana V edan α adalah merupakan konstanta, dan pada saat t = 0, saklar ditutup, maka yang diperlukan adalah bentuk persamaan i.

Dengan menggunakan hukum tegangan Kirchhoff dapat dituliskan :

$$L\frac{di}{dt} + R.i = V\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.12}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i = \frac{V}{L}\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.13}$$

maka persamaan karakteristiknya adalah :

$$A.\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.14}$$

sehingga penyelesaian komplementer adalah :

$$i_c = K\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.15}$$

maka melihat ke Tabel 5.1, penyelesaian yang dicoba adalah :

$$i_p = A.\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.16}$$

dimana A adalah merupakan koefisien tak-tentu, maka untuk $i = i_p$, Persamaan (5.13) menjadi:

$$-\alpha.A.\varepsilon^{-\alpha t} + \frac{R}{L}.A.\varepsilon^{-\alpha t} = \frac{V}{L}.\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.17}$$

1. Bilamana : $\alpha \neq \frac{R}{L}$, maka dari Persamaan (5.17) diperoleh :

   $$A = \frac{V}{R - \alpha L} \tag{5.18}$$

   sehingga kalau Persamaan (5.18) ini disubtitusikan ke dalam Persamaan (5.16) diperoleh :

   $$i_p = \frac{V}{R - \alpha L}.\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.19}$$

   sehingga penyelesaian lengkapnya adalah :

   $$i = i_p + i_c$$

   atau :

   $$i = K.\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R - \alpha L}.\varepsilon^{-\alpha t}$$

   dimana konstanta sembarang K dapat ditentukan dari kondisi awal.

2. Bilamana $\alpha = \frac{R}{L}$, maka bentuk persamaan yang dicoba adalah :

   $$i_p = At.\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.20}$$

   maka Persamaan (5.13) menjadi :

   $$A(-\alpha t\varepsilon^{-\alpha t} + \varepsilon^{-\alpha t}) + \alpha At\varepsilon^{-\alpha t} = \frac{V}{L}\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.21}$$

   dan diperoleh :

   $$A = \frac{V}{L} \tag{5.22}$$

   maka :

$$i_p = \frac{V}{L} t.\varepsilon^{-\alpha t} \tag{5.23}$$

sehingga penyelesaian lengkapnya :

$$i = i_p + i_c$$

atau :

$$i = K.\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{L} t\varepsilon^{-\alpha t}$$

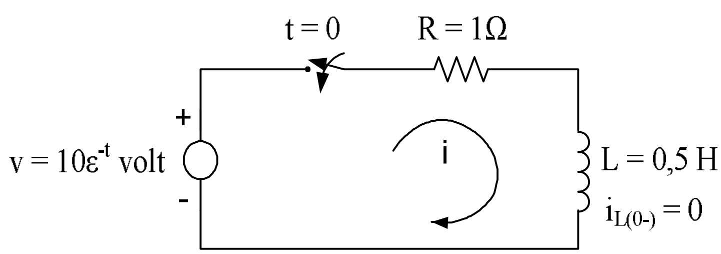
atau :

$$i = \varepsilon^{-\alpha t}\left(K. + \frac{V}{L} t\varepsilon^{-\alpha t}\right) \tag{5.24}$$

dimana konstanta sembarang K dapat ditentukan dari kondisi awal.

Contoh :

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



Carilah bentuk persamaan arus i.

Jawab :

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i = \frac{10}{L}\varepsilon^{-t}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + 2.i = 20\varepsilon^{-t} \tag{a}$$

maka persamaan karakteristik :

$$s + 2 = 0$$

sehingga penyelesaian komplementer :

$$i_c = K\varepsilon^{-2t}$$

Penyelesaian integral khusus :

$$i_p = A\varepsilon^{-t}$$

terlihat bentuknya tidak sama dengan fungsi komplementer, maka substitusikan kedalam Persamaan (a) untuk $i = i_p$:

$$-A\varepsilon^{-t} + 2A\varepsilon^{-t} = 20\varepsilon^{-t}$$

atau :

$$A = 20$$

Sehingga penyelesaian integrla khusus adalah :

$$i_p = 20\varepsilon^{-t}$$

sehingga penyelesaian lengkap :

$$i = i_p + i_c$$

atau :

$$i = K\varepsilon^{-2t} + 20\varepsilon^{-t} \qquad \text{(b)}$$

karena arus pada L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0, atau t = 0+ arus i(0) = 0, sehingga Persamaan (b) menjadi :

$$i = 0 = K\varepsilon^{-2.0} + 20.\varepsilon^{-0}$$

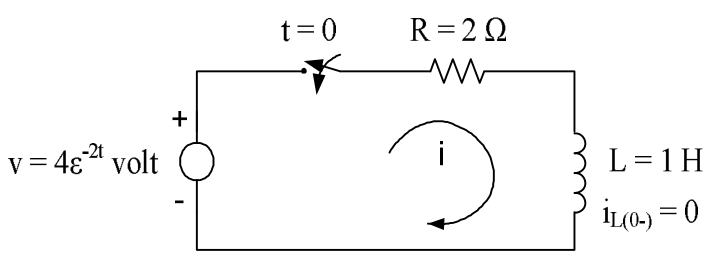
atau : $K = -20$

Maka persamaan arus pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\underline{i = 20\left(\varepsilon^{-t} - \varepsilon^{-2t}\right) \text{ Amp.}}$$

<u>Contoh :</u>

Rangkaian seperti berikut :



Carilah bentuk persamaan arus I setelah saklar ditutup.

<u>Jawab :</u>

Persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}.i=\frac{4}{L}\varepsilon^{-2t}$$

atau :

$$\frac{di}{dt}+2.i=4\varepsilon^{-2t} \qquad (a)$$

maka persamaan karakteristik :

$$s + 2 = 0$$

sehingga penyelesaian komplementer :

$$i_c = K\varepsilon^{-2t}$$

terlihat bentukpersamaan tegangan sama dengan fungsi komplementer, maka integral khusus yang dicoba adalah :

$$i_p = At\varepsilon^{-2t}$$

bilamana Persamaan (a) untuk i = i_p, maka diperoleh :

$$At(-2)\varepsilon^{-2t}+A\varepsilon^{-2t}+2At\varepsilon^{-2t}=4\varepsilon^{-2t}$$

atau :

$$A = 4$$

maka :

$$i_p = 4t\varepsilon^{-2t}$$

maka penyelesaian lengkap :

$$i = i_p + i_c$$

atau :

$$i = K\varepsilon^{-2t}+4t\varepsilon^{-2t} \qquad (b)$$

karena arus pada L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0, atau t = 0+ arus pada rangkian adalah nol, sehingga Persamaan (b) menjadi :

$$i = 0 = K\varepsilon^{-2.0}+4.0.\varepsilon^{-2.0}$$

atau :

$$K = 0$$

Maka persamaan arus pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\underline{i = 4t\varepsilon^{-2t} \quad \text{Amp.}}$$

5.8 Soal Latihan

1. Suatu sumber tegangan V = 20 volt (dc) dipasangkan ke suatu rangkaian seri RLC dimana R = 9 Ω ; L = 1 H dan C = 0,05 F. Carilah bentuk umum persamaan arus i yang mengalir pada rangkaian dan penyelesaian partikular dari i. Asumsikan kapasitor sebelumnya tanpa muatan.
2. Suatu sumber tegangan $v = 4\varepsilon^{-2t}$ volt pada saat t = 0 dihubungkan ke rangkaian seri yang terdiri dari R = 0,5 Ω dan L = 0,25 H. Dengan mengabaikan kondisi awal, carilah penyelesaian partikular arus i yang mengalir pada rangkaian.

3. Suatu sumber tegangan $v = 30\varepsilon^{-0,5t}$ V pada saat t = 0 dihubungkan ke rangkaian seri R = 3 Ω dan L = 6 H. Dengan mengansumsikan kondisi awal maka berapa besar arus pada rangkaian ini setelah terhubung dengan sumber tegangan selama 5 detik dan bagaimana bentuk persamaan tegangan pada R setelah terhubung dengan sumber tegangan tersebut.

4. Suatu sumber tegangan $v = 2\varepsilon^{-2t}$ V pada saat t = 0 dihubungkan ke rangkaian seri R = 4 Ω dan L = 1 H. Dengan mengabaikan semua kondisi awal, berapa besar tegangan pada R setelah sumber tegangan terhubung ke rangkaian selama 0,5 detik.