BAB 4

PENGANALISAAN RANGKAIAN DENGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA ATAU LEBIH TINGGI

4.1 Pendahuluan

Persamaan-persamaan diferensial yang dipergunakan pada penganalisaan yang lalu hanya terbatas pada persamaan-persamaan diferensial orde pertama dengan koefisien konstanta. Selanjutnya akan dibahas persamaan diferensial dengan batasan yang sama yaitu linieritas dan koefisien konstan akan tetapi dengan orde yang lebih tinggi. Adapun prosedur matematika diberikan berikut ini termasuk dalam metode penyelesaian klasik dimana metode klasik ini memberikan pengertian-pengertian yang lebih mudah/baik mengenai penafsiran persamaan diferensial dan persyaratan suatu penyelesaian.

Pada umumnya persamaan diferensial homogen orde dua dengan koefisien konstan diperlihatkan sebagai berikut.

$$a_0 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_2 i = 0 \tag{4.1}$$

Adapun penyelesaian persamaan diferensial ini harus berbentuk sedemikian rupa sehingga penyelesaian itu sendiri apabila diturunkan pertama dan kedua dikalikan dengan suatu koefisien konstan jumlahnya menjadi nol, hal ini mungkin terjadi kalau hasil penyelesaiannya berbentuk eksponensial yang dimisalkan dengan :

$$i(t) = K.\varepsilon^{st} \tag{4.2}$$

sehingga :

$$\frac{di}{dt} = K.s.\varepsilon^{st} \tag{4.3}$$

dan :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = K.s^2.\varepsilon^{st} \tag{4.4}$$

dimana K dan s merupakan konstanta yang nyata, imajiner atau kompleks.

Selanjutnya apabila Persamaan (4.2), (4.3) dan (4.4) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.1) akan diperoleh :

$$a_0 s^2 K\varepsilon^{st} + a_1 sK\varepsilon^{st} + a_2 K\varepsilon^{st} = 0 \tag{4.5}$$

oleh karena harga $K\varepsilon^{st}$ tidak akan pernah nol untuk harga t yang terbatas/finite, maka Persamaan (4.5) dapat dibuat menjadi :

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \tag{4.6}$$

adapun Persamaan (4.6) ini persyaratan agar $K\varepsilon^{st}$ merupakan hasil penyelesaian, yang disebut juga dengan persamaan karakteristik atau auksiliari yang memiliki akar-akar :

$$s_1 ; s_2 = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \frac{1}{2a_0}\sqrt{a_1^{\,2} - 4a_0 a_2} \tag{4.7}$$

oleh sebab itu terdapat dua bentuk eksponensial dari penyelesaian persamaan diferensial homogen dari Persamaan (4.1), yaitu :

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= K_1 \varepsilon^{s_1 t} \text{...............(a)} \\ i_2 &= K_1 \varepsilon^{s_2 t} \text{...............(b)} \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

karena i_1 dan i_2 masing-masing merupakan penyelesaian persamaan diferensial dari Persamaan (4.5), sehingga jumlah penyelesaian-penyelesaian ini adalah :

$$i_3 = i_1 + i_2 \tag{4.9}$$

dengan demikian i_3 juga merupakan suatu penyelesaian, dimana hal ini dapat diperlihatkan dengan mensubstitusikan Persamaan (4.9) ke dalam Persamaan (4.5) yang hasilnya adalah :

$$a_0 \frac{d^2(i_1 + i_2)}{dt^2} + a_1 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + a_2 (i_1 + i_2) = 0 \tag{4.10}$$

atau :

$$\underbrace{\left(a_0 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + a_1 \frac{di_1}{dt} + a_2 i_1 \right)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\left(a_0 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + a_1 \frac{di_2}{dt} + a_2 i_2 \right)}_{\downarrow \atop 0} = 0 \tag{4.11}$$

atau :

$$0 + 0 = 0$$

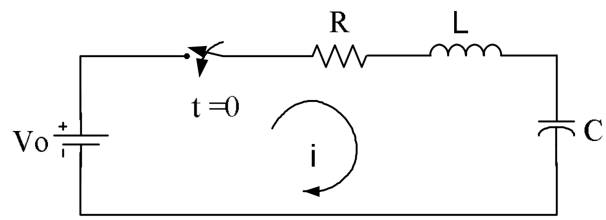
sehingga i_3 menyetakan penyelesaian dari Persamaan (4.5), maka secara umum dapat dinyatakan penyelesaian Persamaan (4.5) ini adalah :

$$i(t) = K_1 . \varepsilon^{s_1 t} + K_2 . \varepsilon^{s_2 t} \tag{4.12}$$

Adapun harga-harga s_1 dan s_2 yang ditentukan dengan Persamaan (4.7) dapat merupakan bilangan nyata, imajiner ataupun kompleks dan ini tergantung dari harga-harga a_0, a_1 dan a_2 dari persamaan diferensial homogen tersebut.

4.2 Respons Rangkaian RLC Seri Dengan Input Unit Step

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



Gambar 4.1 Rangkaian seri RLC dengan input tegangan searah

dengan mengabaikan semua kondisi awal, maka pada saat t = 0 saklar ditutup, sehingga dapat dituliskan persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_o \tag{4.13}$$

bila dideferensialkan satu kali maka diperoleh :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R.\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \tag{4.14}$$

atau :

$$\left(L\frac{d^2}{dt^2} + R.\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}\right) i = 0$$

atau :

$$L\frac{d^2}{dt^2} + R.\frac{d}{dt} + \frac{1}{C} = 0 \tag{4.15}$$

misalkan :

$$s = \frac{d}{dt}$$

sehingga :

$$L.s^2 + R.s + \frac{1}{C} = 0 \tag{4.16}$$

Persamaan (4.16) ini disebut sebagai persamaan karakteristik rangkaian di atas. Adapun akar-akar persamaan karakteristik ini adalah :

$$s_1; s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} \tag{4.17}$$

maka bentuk umum penyelesaian dari persamaan diferensial :

$$i = K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t} \tag{4.18}$$

dalam hal ini ada tiga kemungkinan, yaitu :

1. Bilamana : $R^2 > \frac{4L}{C}$ (keadaan *overdamped* / teredam lebih)

Dalam kondisi ini besaran $\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)$ adalah positif, sehingga akar-akar s_1 dan s_2 adalah nyata. Untuk menentukan hraga K_1 dan K_2 dapat dicari dari kondisi awal yang diketahui.

Pada saat saklar ditutup (t = 0), maka $i_{(0+)} = 0$. Hal ini disebabkan sifat dari L dan C yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0, bagian dari $\frac{1}{C}\int i\,dt = 0$, oleh karena itu Persamaan (4.13) untuk t = 0, adalah :

$$L\frac{di_{(0+)}}{dt} + R.0 + \frac{1}{C}\int 0\,dt = V_o$$

maka :

$$\frac{di_{(0+)}}{dt} = \frac{V_o}{L} \qquad (4.19)$$

sehingga terlihat terdapat dua kondisi awal, yaitu : $i_{(0+)} = 0$ dan $\frac{di_{(0+)}}{dt} = \frac{V_o}{L}$, dan jika hrga-harga ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.18) akan diperoleh :

$$i(0+) = 0 = K_1.\varepsilon^{s_1 0} + K_2.\varepsilon^{s_2 0}$$

atau :

$$K_1 + K_2 = 0 \qquad (4.20)$$

Kemudian jika Persamaan (4.18) dideferensialkan satu kali diperoleh :

$$\frac{di}{dt} = s_1K_1.\varepsilon^{s_1 t} + s_2K_2.\varepsilon^{s_2 t} \qquad (4.21)$$

karena $\frac{di_{(0+)}}{dt} = \frac{V_o}{L}$ pada saat t = 0, maka Persamaan (4.21) menjadi :

$$\frac{di_{(0+)}}{dt} = \frac{V_o}{L} = s_1K_1.\varepsilon^{s_1 0} + s_2K_2.\varepsilon^{s_2 0}$$

sehingga di dapat :

$$s_1K_1 + s_2K_2 = \frac{V_o}{L} \qquad (4.22)$$

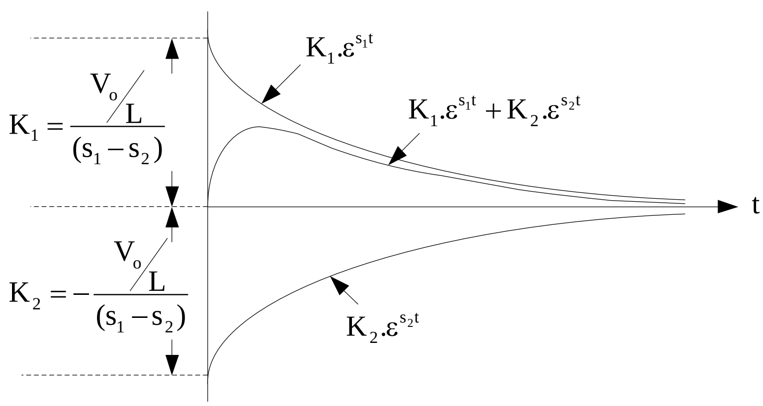
dari Persamaan (4.20) dan (4.21) akan diperoleh :

$$K_1 = \frac{V_o}{L(s_1 - s_2)} \text{ dan } K_2 = \frac{V_o}{L(s_2 - s_1)}$$

dan jika harga-harga K_1 dan K_2 ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.14), maka diperoleh penyelesaian persamaan ini untuk kondisi $R > \frac{4L}{C}$ adalah :

$$i = \frac{V_o/L}{(s_1 - s_2)}\left(\varepsilon^{s_1 t} + \varepsilon^{s_2 t}\right) \tag{4.23}$$

Kalau persamaan (4.23) ini digambarkan bentuknya adalah :



Gambar 4.2 Kurva arus pada rangkaian seri RLC dengan input step pada kondisi $R > \frac{4L}{C}$

Gambar 4.2, menggambarkan sifat kurva yangmemperlihatkan variasi $K_1.\varepsilon^{s_1 t}$ dan $K_2.\varepsilon^{s_2 t}$ dengan waktu dan juga variasi arus total $\left(K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t}\right)$ dengan waktu.

2. Bilamana : $R^2 = \frac{4L}{C}$ (keadaan *critical damped* / teredam lebih)

Pada kondisi ini besaran $\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)$ menjadi nol, oleh karena itu akar persamaan karakteristik Persamaan (4.16) adalah nyata dan sama, sehingga penyelesaian Persamaan (104) menjadi :

$$i = (K_1 + K_2)\varepsilon^{st} \tag{4.24}$$

kalau dimisalkan : $K = (K_1 + K_2)$, maka persamaan di atas berbentuk :

$$i = K\varepsilon^{st} \tag{4.25}$$

Hal ini belumlah bentuk penyelesaian yang sempurna karena penyelesaian dari persamaan deferensial orde dua harus mengandung dua konstanta yang berbeda, oleh karena itu Persamaan (4.25) harus dimodifikasi. Misalkan diasumsikan penyelesaian Persamaan (4.25) berbentuk :

$$i = y.\varepsilon^{st} \tag{4.26}$$

dimana y adalah besaran yang akan dicari.

Substitusikan Persamaan (4.26) ke dalam Persamaan (4.14) dengan suatu ketentuan bahwa y memenuhi persamaan diferensial :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \tag{4.27}$$

dan kemudian bila diintegrasikan dua kali berturut-turut akan menghasilkan :

$$y = K_1 + K_2 t \tag{4.28}$$

dan kalau Persamaan (4.28) ini disubstitusikan ke Persamaan (4.26) diperoleh :

$$i = K_1\varepsilon^{st} + K_2 t\varepsilon^{st} \tag{4.29}$$

dimana dalam hal ini : $s = -\frac{R}{2L}$.

Di dalam hal ini kondisi awal juga sama dengan : $i(0+) = 0$ dan $\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L}$.

Apabila harga-harga ini disubstitusikan ke Persamaan (4.29) akan diperoleh :

$$i(0+) = 0 = K_1\varepsilon^{s0} + K_2 0\varepsilon^{s0}$$

sehingga diperoleh $K_1 = 0$. dan jika harga K_1 ini disubstitusikan ke Persamaan (4.29) maka diperoleh :

$$i = K_2 t\varepsilon^{st} \tag{4.30}$$

dan apabila Persamaan (4.30) dideferensialkan satu kali maka didapat :

$$\frac{di}{dt} = K_2\left(\varepsilon^{st} + st\varepsilon^{st}\right) \tag{4.31}$$

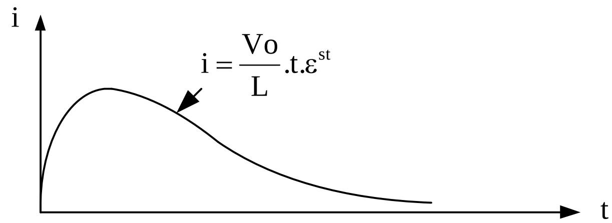
dan selanjutnya bila kondisi awal $\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L}$, pada t = 0 disubstitusikan ke Persamaan (4.31) ini akan diperoleh :

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L} = K_2\left(\varepsilon^{s0} + s.0.\varepsilon^{s0}\right)$$

sehingga diperoleh $K_2 = \frac{Vo}{L}$, dan apabila harga K_2 ini disubstitusikan ke Persamaan (4.30), maka diperoleh persamaan arus yang mengalir pada rangkaian untuk kondisi $R = \frac{4L}{C}$, yaitu :

$$i = \frac{Vo}{L}.t.\varepsilon^{st} \tag{4.32}$$

dan kalau digambarkan kurvanya adalah :



Gambar 4.3 Kurva arus pada rangkaian seri RLC dengan input step pada kondisi $R > \frac{4L}{C}$

3. Bilamana : $R^2 < \frac{4L}{C}$ (keadaan *underdamped* / kurang teredam)

Pada kondisi ini besaran $\left(R^2 - \frac{4L}{C}\right)$ adalah negatif, oleh karena itu akar-akar persamaan karakteristik dari Persamaan (4.16) bilangan kompleks yang dimisalkan :

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= A + jB\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a) \\ s_2 &= A - jB\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b) \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

dimana :

$$A = \frac{-R}{2L} \quad \text{dan} \quad B = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} \tag{4.34}$$

oleh karena itu Persamaan (4.18) menjadi :

$$i = K_1\varepsilon^{(A+jB)t} + K_2\varepsilon^{(A-jB)t} \tag{4.35}$$

atau :

$$i = \varepsilon^{At}\left(K_1\varepsilon^{jBt} + K_2\varepsilon^{-jBt}\right) \tag{4.36}$$

karena :

$$\varepsilon^{jBt} = \cos Bt + j\sin Bt \qquad \text{dan} \qquad \varepsilon^{-jBt} = \cos Bt - j\sin Bt$$

maka Persamaan (4.36) menjadi :

$$i = \varepsilon^{At}\left[K_1(\cos Bt + j\sin Bt) + K_2(\cos Bt - j\sin Bt)\right] \tag{4.37}$$

apabila kondisi awal : i(0+) = 0, untuk t = 0, disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.37) maka akan diperoleh :

$$i(0+) = 0 = \varepsilon^{A.0}\left[K_1(\cos B.0 + j\sin B.0) + K_2(\cos B.0 - j\sin B.0)\right]$$

atau :

$$K_1 + K_2 = 0 \tag{4.38}$$

Selanjutnya diferensialkan Persamaan (4.37) satu kali dan kemudian substitusikan $\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L}$ kedalamnya untuk t = 0 :

$$\frac{di}{dt}(0+) = \begin{matrix} A\varepsilon^{At}\left[K_1(\cos Bt + j\sin Bt) + K_2(\cos Bt - j\sin Bt)\right] + \\ A\varepsilon^{At}\left[K_1B(-\sin Bt + j\cos Bt) + K_2B(-\sin Bt - j\cos Bt)\right] \end{matrix} \tag{4.39}$$

kemudian substitusikan kondisi awal $\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L}$ untuk t = 0 ke dalam Persamaan (4.39) di atas, maka diperoleh :

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{Vo}{L} = \begin{matrix} A\varepsilon^{A0}\left[K_1(\cos B.0 + j\sin B.0) + K_2(\cos B.0 - j\sin B.0)\right] + \\ A\varepsilon^{A0}\left[K_1B(-\sin B.0 + j\cos B.0) + K_2B(-\sin B.0 - j\cos B.0)\right] \end{matrix}$$

atau :

$$\frac{Vo}{L} = A(K_1 + K_2) + jB(K_1 - K_2)$$

karena menurut Persamaan (4.38) : $K_1 + K_2 = 0$, maka :

$$\frac{Vo}{L} = j2BK_1 \tag{4.40}$$

oleh karena itu diperoleh :

$$K_1 = \frac{Vo}{j2BL} \qquad \text{dan} \qquad K_2 = -\frac{Vo}{j2BL}$$

kemudian substitusikan harga-harga K_1 dan K_2 ke dalam Persamaan (4.37) sehingga diperoleh :

$$i = \varepsilon^{At}\left[\frac{Vo}{j2BL}(\cos Bt + j\sin Bt) - \frac{Vo}{j2BL}(\cos Bt - j\sin Bt)\right]$$

atau :

$$i = \varepsilon^{At}\,\frac{Vo}{BL}\sin Bt \qquad (4.41)$$

apabila harga A dan B pada Persamaan (4.34) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.41) di atas, akan didapat :

$$i = \frac{Vo}{L}\,\frac{2L}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}\,\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}\,\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}\right)t$$

atau :

$$i = \frac{Vo.\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}.\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right).t \qquad (4.42)$$

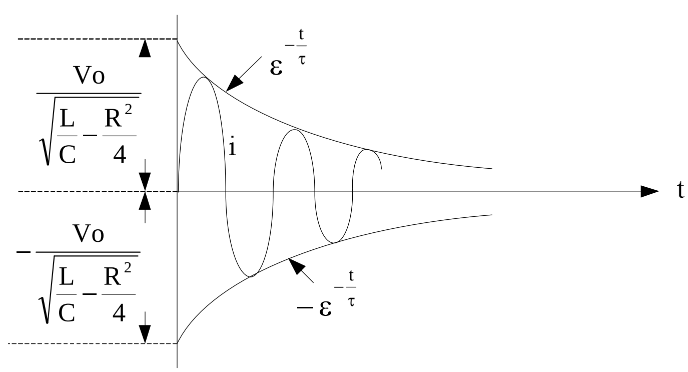
terlihat bahwa dalam keadaan ini arus berosilasi, dan kalau bagian eksponensial $\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}$ dihilangakan, maka arus i murni sinusoidal dengan frekuensi resonansi (*natural angular frequency*).

$$\omega_n = \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right) \quad \left[\text{radian}/\text{detik}\right] \qquad (4.43)$$

atau :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right) \quad \left[\text{siklus}/\text{detik}\right] \qquad (4.44)$$

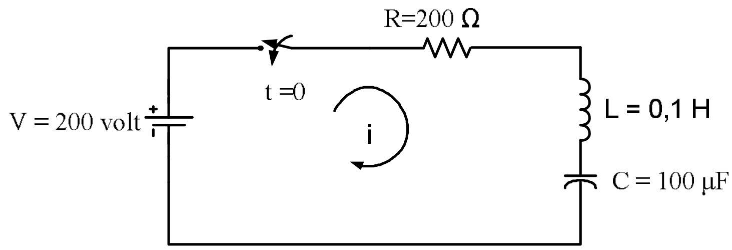
kalau Persamaan (4.42) digambarkan :



Gambar 4.4 Kurva arus dari rangkaian seri RLC dengan input unti step pada kondisi $R < \frac{4L}{C}$

Contoh :

Saklar pada rangkaian di bawah ini ditutup pada saat t = 0, dengan mengabaikan semua kondisi awal elemen rangkaian, carilah bentuk persamaan arus i.



Jawab :

Bila saklar ditutup, persamaan tegangan pada rangkaian adalah :

$$L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad \text{(a)}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i + \frac{1}{LC}\int i\,dt = \frac{V}{L}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{200}{0{,}1}.i + \frac{1}{(0{,}1).(100.10^{-6})}\int i\,dt = \frac{200}{0{,}1}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + 2000.i + 10.10^{4}\int i\,dt = 2000$$

kalau dideferensialkan :

$$\frac{d^2 i}{d^2 t} + 2000.\frac{di}{dt} + 10.10^{4}.i = 0 \qquad \text{(b)}$$

atau :

$$\left(\frac{d^2}{d^2 t} + 2000.\frac{d}{dt} + 10.10^{4}\right)i = 0 \qquad \text{(c)}$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$, maka Persamaan (c) menjadi :

$$\left(s^2 + 2000.s + 10.10^{4}\right)i = 0$$

atau :

$$\left(s^2 + 2000.s + 10.10^{4}\right) = 0$$

adapun akar-akar persamaan karakteristik ini adalah :

$$s_1 = \frac{-2000 + \sqrt{2000^2 - 4(10.10^4)}}{2.1} = -51{,}31$$

$$s_2 = \frac{-2000 - \sqrt{2000^2 - 4(10.10^4)}}{2.1} = -1948{,}68$$

dari rangkaian dapat dilihat :

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{200}{2.0{,}1}\right)^2 = 1.10^6 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0{,}1).(100.10^{-6})} = 1.10^5$$

ternyata : $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ atau $R^2 > \frac{4L}{C}$, sehingga bentuk umum dari Persamaan (b) adalah [lihat Persamaan (4.23)] atau :

$$i = K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t}$$

sehingga :

$$i = K_1.\varepsilon^{-51{,}31.t} + K_2.\varepsilon^{-1948{,}68.t} \qquad \text{(d)}$$

karena kondisi awal diabaikan dan sifat L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0, arus :

$$i(0+) = 0 \qquad \text{(e)}$$

bila Persamaan (e) ini disubstitusikan kedalam Persamaan (d) untuk t = 0, diperoleh :

$$\underbrace{i(0+)}_{\downarrow\, 0} = K_1.\varepsilon^{-51{,}31.0} + K_2.\varepsilon^{-1948{,}68.0}$$

sehingga diperoleh :

$$0 = K_1 + K_2 \qquad \text{(f)}$$

dan demikian juga pada C yang tidak bisa berubah dengan seketika, sehingga $\frac{1}{C}\int i\,dt = 0$ maka kalau harga-harga ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (a) akan diperoleh :

$$L\frac{di}{dt}(0+) + R.\underbrace{i(0+)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i\,dt}_{\downarrow\, 0} = V$$

sehingga :

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = \frac{200}{0{,}1}$$

atau :

$$\frac{di}{dt}(0+) = 2000 \ {}^{Amp}/_{det} \qquad (g)$$

selanjutnya diferensialkan Persamaan (d) satu kali, maka :

$$\frac{di}{dt} = -51{,}31.K_1.\varepsilon^{-51{,}31.t} + 1948{,}68.K_2.\varepsilon^{-1948{,}68.t} \qquad (h)$$

selanjutnya substitusikan Persamaan (g) ke dalam Persamaan (h) untuk t = 0, maka :

$$\underbrace{\frac{di}{dt}(0+)}_{2000} = -51{,}31.K_1.\varepsilon^{-51{,}31.0} + 1948{,}68.K_2.\varepsilon^{-1948{,}68.0}$$

atau :

$$2000 = -51{,}31.K_1 + 1948{,}68.K_2 \qquad (i)$$

maka dari Persamaan (h) dan (i) diperoleh :

$$K_1 = 1 \text{ dan } K_2 = -1$$

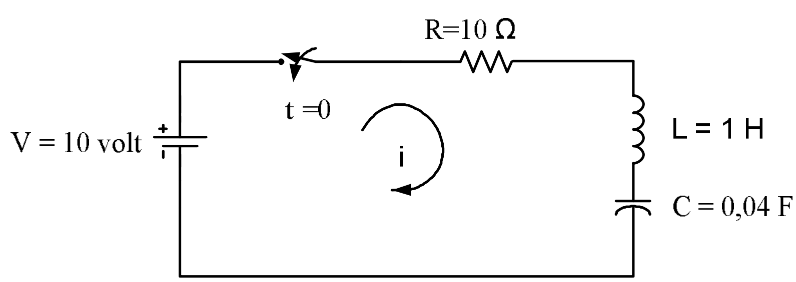
Kemudian harga-harga K1 dan K2 ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (d) maka diperoleh:

$$\underline{i = \varepsilon^{-51{,}31.t} - .\varepsilon^{-1948{,}68.t} \ \text{Amp.}}$$

inilah bentuk persamaan arus yang mengalir pada rangkaian setelah saklar ditutup.

<u>Contoh :</u>

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



dengan mengabaikan kondisi awal, pada saat t = 0 saklar ditutup. Carilah bentuk persamaan arus i pada rangkaian.

<u>Jawab :</u>

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad (a)$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i + \frac{1}{LC}\int i\,dt = \frac{V}{L}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{10}{1}.i + \frac{1}{(1).(0,04)}\int i\,dt = \frac{10}{1}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + 10.i + 25\int i\,dt = 10$$

kalau dideferensialkan satu kali :

$$\frac{d^2 i}{d^2 t} + 10.\frac{di}{dt} + 25.i = 0 \qquad \text{(b)}$$

atau :

$$\left(\frac{d^2}{d^2 t} + 10.\frac{d}{dt} + 25\right)i = 0 \qquad \text{(c)}$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$, maka Persamaan (c) menjadi :

$$\left(s^2 + 10.s + 25\right)i = 0$$

atau :

$$\left(s^2 + 10.s + 25\right) = 0$$

adapun akar-akar persamaan karakteristik ini adalah :

$$s_1 = \frac{-10 + \sqrt{10^2 - 4(1.25)}}{2} = -5 \quad \text{dan} \quad s_2 = \frac{-10 - \sqrt{10^2 - 4(1.25)}}{2} = -5$$

terlihat bahwa :

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{10}{2.1}\right)^2 = 25 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{(1).(0,04)} = 25$$

maka :

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{atau } R^2 = \frac{4L}{C}$$

sehingga bentuk umum penyelesaian Persamaan (b),[lihat Persamaan (4.32)] adalah :

$$i = \varepsilon^{\alpha t}\left(K_1 + K_2 t\right)$$

dimana : $\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{10}{2} = -5$, sehingga :

$$i = \varepsilon^{-5t}\left(K_1 + K_2 t\right) \qquad \text{(d)}$$

karena sifat L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0 arus :

$$i(0+) = 0 \qquad \text{(e)}$$

selanjutnya bila Persamaan (e) disubtitusikan ke dalam Persamaan (d) diperoleh :

$$\underbrace{i(0+)}_{0} = \varepsilon^{-5.0}\left(K_1 + K_2.0\right)$$

atau :

$$K_1 = 0 \qquad \text{(f)}$$

bilamana harga $K_1 = 0$ disubtitusikan ke dalama Persamaan (d), maka diperoleh :

$$i = \varepsilon^{-5t}.K_2 t \qquad \text{(g)}$$

demikian juga dengan C yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka tegangan pada C pada t = 0+ :

$$\frac{1}{C}\int i(0+)\,dt = 0 \qquad \text{(h)}$$

maka jika harga-harga i(0+) = 0 dan $\frac{1}{C}\int i(0+)\,dt = 0$ disubstitusikan kedalam Persamaan (a) untuk t = 0, didapat :

$$L\frac{di}{dt}(0+) + R.\underbrace{i(0+)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(0+)\,dt}_{0} = V$$

atau didapat :

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = 10\ {}^{\text{Amp}}/_{\text{det}}$$

bila Persamaan (d) dideferensialkan satu kali, maka :

$$\frac{di}{dt}(0+) = -5.\varepsilon^{-5t}K_2 t + K_2.\varepsilon^{-5t} \qquad \text{(i)}$$

kalau harga $\frac{di}{dt}(0+) = 10\ {}^{\text{Amp}}/_{\text{det}}$, di substitusikan ke dalam Persamaan (i) untuk t = 0, maka diperoleh :

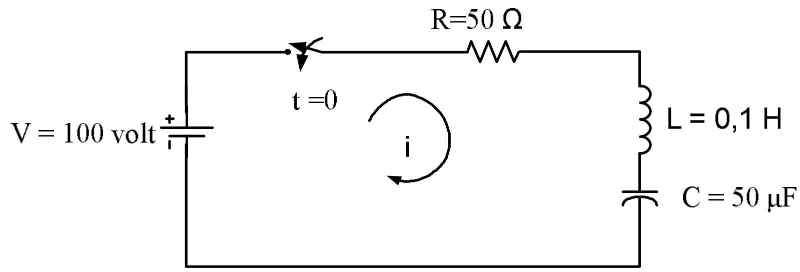
$$\underbrace{\frac{di}{dt}(0+)}_{10} = -5.\varepsilon^{-5.0}K_2.0 + K_2.\varepsilon^{-5.0}$$

maka diperoleh K_2 = 10, dan kalau harga ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (g), maka diperoleh persamaan arus pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\underline{i = 10\,t.\varepsilon^{-5t}\quad \text{Amp}}$$

Contoh :

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



dengan mengabaikan semua kondisi awal, carilah bentuk persamaan arus i pada rangkaian setelah saklar ditutup pada saat t = 0.

Jawab :

Adapun persamaan tegangan pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$L\frac{di}{dt} + R.i + \frac{1}{C}\int i\,dt = V \qquad \text{(a)}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}.i + \frac{1}{LC}\int i\,dt = \frac{V}{L}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + \frac{50}{0,1}.i + \frac{1}{(0,1).(50.10^{-6})}\int i\,dt = \frac{100}{0,1}$$

atau :

$$\frac{di}{dt} + 500.i + 2.10^{5}\int i\,dt = 1000$$

dideferensialkan satu kali :

$$\frac{d^2 i}{d^2 t} + 500.\frac{di}{dt} + 2.10^{5}.i = 0 \qquad \text{(b)}$$

atau :

$$\left(\frac{d^2}{d^2 t} + 500.\frac{d}{dt} + 2.10^{5}\right)i = 0 \qquad \text{(c)}$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$, maka Persamaan (c) menjadi :

$$\left(s^2 + 500.s + 2.10^{5}\right)i = 0$$

atau :

$$s^2 + 500.s + 2.10^{5} = 0$$

adapun akar-akar persamaan karakteristik ini adalah :

$$s_1 = \frac{-500 + \sqrt{500^2 - 4(2.10^5)}}{2} = -250 + j370,8$$

$$s_2 = \frac{-500 - \sqrt{500^2 - 4(2.10^5)}}{2} = -250 - j370,8$$

dari rangkaian terlihat :

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{50}{2.0,1}\right)^2 = 62.500 \quad \text{dan} \quad \frac{1}{LC} = \frac{1}{(0,1).(50.10^{-6})} = 200.000$$

ternyata :

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad \text{atau } R^2 < \frac{4L}{C}$$

sehingga untuk mendapatkan penyelesaian dari Persamaan (b) digunakan bentuk Persamaan (4.39) dengan :

$$\alpha = -\frac{R}{2L} = -\frac{50}{2.0,1} = -250$$

dan :

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(0,1).(50.10^{-6})} - \left(\frac{50}{2.0,1}\right)^2} = 370,8$$

sehingga :

$$i = \varepsilon^{-250t}\left[K_1(\cos 370,8t + j\sin 370,8t) + K_2(\cos 370,8t - j\sin 370,8t)\right]$$

atau :

$$i = \varepsilon^{-250t}\left[(K_1 + K_2)\cos 370,8t + j(K_1 - K_2)\sin 370,8t\right] \qquad \text{(d)}$$

misalkan :

$$K_3 = K_1 + K_2 \quad \text{dan} \quad K_4 = j\,(K_1 + K_2)$$

Maka Persamaan (d) menjadi :

$$i = \varepsilon^{-250t}\left[K_3 \cos 370,8t + K_4 \sin 370,8t\right] \qquad \text{(e)}$$

kondisi awal elemen diabaikan dan karena sifat dari L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka pada t = 0, arus :

$$i(0+) = 0 \qquad \text{(f)}$$

demikian juga dengan C yang sifatnya tidak dapat berubah dengan seketika, sehingga $\frac{1}{C}\int i\,dt = 0$ maka pada saat t = 0+, dari Persamaan (a) didapat :

$$L\frac{di}{dt}(0+) + R.\underbrace{i(0+)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(0+)\,dt}_{0} = V \qquad \text{(g)}$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{di}{dt}(0+) = \frac{V}{L} = \frac{100}{0,1} = 1000 \;\; ^{Amp}/_{det} \qquad \text{(h)}$$

dan apabila Persamaan (f) disubstitusikan kedalam Persamaan (e) untuk t = 0, diperoleh :

$$\underbrace{i(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \varepsilon^{-250.0}\left[K_3 \cos 370{,}8.0 + K_4 \sin 370{,}8.0\right]$$

maka diperoleh :

$$K_3 = 0$$

Kemudian diferensialkan Persamaan (e) satu kali :

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon^{-250t}\left[-370{,}8.K_3 \sin 370{,}8\,t + 370{,}8 \;\cos 370{,}8\,t\right] - 250.\varepsilon^{-250t}\left[K_3 \cos 370{,}8\,t + K_4 \sin 370{,}8\,t\right]$$

atau :

$$\frac{di}{dt} = \varepsilon^{-250t}\left[(-370{,}8.K_3 - K_4)\sin 370{,}8\,t + (370{,}8.K_4 - K_3)\;\cos 370{,}8\,t\;\right] \qquad \text{(i)}$$

kemudian substitusikan Persamaan (h) ke Persamaan (i) untuk t = 0 :

$$\underbrace{\frac{di}{dt}(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 1000}} = \varepsilon^{-250.\,0}\left[(-370{,}8.\underbrace{K_3}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - K_4)\sin 370{,}8.0 + (370{,}8.K_4 - \underbrace{K_3}_{\substack{\downarrow \\ 0}})\;\cos 370{,}8.0\right]$$

sehingga :

$$1000 = 370{,}8.K_4$$

maka :

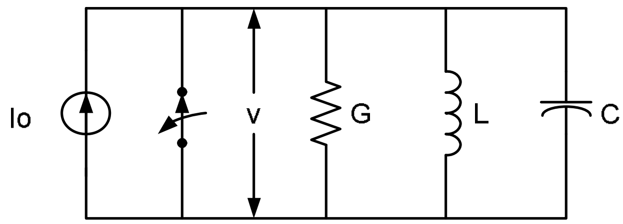
$$K_4 = \frac{1000}{370{,}8} = 2{,}7$$

kemudian harga-harga K_3 dan K_4 yang diperoleh disubstitusikan ke dalam Persamaan (e) sehingga didapat persamaan arus yang mengalir pada rangkaian setelah saklar ditutup adalah :

$$\underline{i = 2{,}7.\varepsilon^{-250t} \sin 370{,}8\,t \quad \text{Amp.}}$$

4.3 Response Rangkaian Paralel RLC Dengan Sumber Searah

Rangkaian di bawah ini memperlihatkan rangkaian paralel RLC dengan sumber arus searah Io dengan semua kondisi awal elemen pasif diabaikan dan pada saat t = 0 saklar pada rangkaian akan dibuka.



Gambar 4.5 Rangkaian paralel RLC dengan sumber searah

Bila saklar terbuka, maka menurut hukum arus Kirchhoff dapat dituliskan :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \tag{4.45}$$

dideferensialkan satu kali :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{4.46}$$

atau :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{d}{dt} + \frac{1}{LC}\right).v = 0 \tag{4.47}$$

bilamana : $\frac{d}{dt} = s$, maka Persamaan (139) menjadi :

$$\left(s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}\right).v = 0 \tag{4.48}$$

Persamaan (4.48) sering disebut sebagai persamaan karakteristik dari rangkaian pada Gambar 4.5, dan persamaan ini dapat dibentuk menjadi :

$$(s - s_1)\ (s - s_2)v = 0 \tag{4.49}$$

dengan akar-akar :

$$s_1 = \frac{-G}{2C} + \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - \frac{4C}{L}}$$

$$s_2 = \frac{-G}{2C} - \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - \frac{4C}{L}}$$

misalkan : $\alpha = \frac{-G}{2C}$ dan $\beta = \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - \frac{4C}{L}}$, sehingga :

$$s_1 = (\alpha + \beta) \text{ dan } s_2 = (\alpha - \beta)$$

sehingga Persamaan (4.49) menjadi :

$$[s - (\alpha + \beta)][s - (\alpha - \beta)]v = 0$$

terlihat bahwa harga β bisa potitif; nol dan imaginer / negatif,

Kemunkinan I : $\mathbf{G^2 > \frac{4C}{L}} \rightarrow$ **harga β adalah positif dimana s_1 dan s_2 nyata.**

Dari Persamaan (4.49) yang berbentuk :

$$(s - s_1)(s - s_2)v = 0$$

dimisalkan :

$$(s - s_2)v = u \tag{4.50}$$

maka Persamaan (4.49) menjadi:

$$(s - s_1)\, u = 0$$

karena $\frac{d}{dt} = s$, maka :

$$\frac{du}{dt} - s_1.u = 0$$

atau :

$$\frac{du}{u} = s_1 dt$$

kalau di integralkan :

$$\mathrm{Ln}(u) = s_1 t + K'$$

atau :

$$u = \varepsilon^{s_1 t + K'} = \varepsilon^{K'} \varepsilon^{s_1 t}$$

karena $\varepsilon^{K'} = K$, maka :

$$u = K\varepsilon^{s_1 t} \tag{4.51}$$

apabila Persamaan (4.51) ini disubstitusikan kedalam Persamaan (4.50), maka didapat :

$$(s - s_2)v = K\varepsilon^{s_1 t}$$

karena $\frac{d}{dt} = s$, maka :

$$\left(\frac{d}{dt} - s_2\right)v = K\varepsilon^{s_1 t}$$

atau :

$$\frac{dv}{dt} - s_2.v = K\varepsilon^{s_1 t}$$

kalau ruas kiri dan kanan persamaan ini dikalikan dengan faktor integrasi $\varepsilon^{-s_2 t}$,maka hasilnya:

$$\varepsilon^{-s_2 t}\frac{dv}{dt} - s_2.v.\varepsilon^{-s_2 t} = K\varepsilon^{(s_1 - s_2)t} \tag{4.52}$$

karena :

$$d(v.\varepsilon^{-s_2 t}) = \varepsilon^{-s_2 t} - s_2 \varepsilon^{-s_2 t}$$

maka Persamaan (4.52) menjadi :

$$d(v.\varepsilon^{-s_2 t}) = K.\varepsilon^{(s_1 - s_2)t}$$

kalau diintegralkan :

$$\int d(v.\varepsilon^{-s_2 t}) = K.\int \varepsilon^{(s_1 - s_2)t}$$

atau :

$$v.\varepsilon^{-s_2 t} = \frac{K}{(s_1 - s_2)}.\varepsilon^{(s_1 - s_2)t} + K'' \qquad (4.53)$$

bilamana ruas kiri dan kanan Persamaan (4.53) dikalikan dengan $\varepsilon^{s_2 t}$, maka :

$$v.\varepsilon^{-s_2 t}.\varepsilon^{s_2 t} = \frac{K}{(s_1 - s_2)}.\varepsilon^{(s_1 - s_2)t}.\varepsilon^{s_2 t} + K''.\varepsilon^{s_2 t}$$

atau :

$$v = \frac{K}{(s_1 - s_2)}.\varepsilon^{s_1 t} + K''\varepsilon^{s_2 t} \qquad (4.54)$$

kalau dimisalkan :

$$K_1 = \frac{K}{(s_1 - s_2)} \quad \text{dan} \quad K_2 = K''$$

maka Persamaan (4.54) menjadi :

$$v = K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t} \qquad (4.55)$$

ini adalah bentuk umum penyelesaian dari Persamaan (4.45) unutk kondisi $G^2 > \frac{4C}{L}$, dimana K_1 dan K_2 dapat ditentukan dari kondisi awal rangkaian.

Apabila saklar dibuka pada saat t = 0, maka :

$$v(0+) = 0 \qquad (4.56)$$

hal ini disebabkan tegangan pada terminal kapasitor C tidak dapat berubah dengan seketika, demikian pula halnya dengan arus yang mengalir pada L pada t = 0, yaitu $\frac{1}{L}\int v\,dt = 0$, dengan demikian Persamaan (4.45) untuk t = 0 menjadi :

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\downarrow\, 0} = Io$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} \tag{4.57}$$

Selanjutnya apabila Persamaan (4.56) disubtitusikan ke dalam Persamaan (4.55) untuk t = 0 akan diperoleh :

$$\underbrace{v(0+)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = K_1.\varepsilon^{s_1.0} + K_2.\varepsilon^{s_2.0}$$

atau :

$$K_1 + K_2 = 0 \tag{4.58}$$

selanjutnya diferensialkan Persamaan (4.55) satu kali :

$$\frac{dv}{dt} = s_1.K_1.\varepsilon^{s_1 t} + s_2 K_2.\varepsilon^{s_2 t}$$

kemudian substitusikan Persamaan (4.57) untuk t = 0 ke dalam persamaan di atas, sehingga :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\substack{\downarrow \\ Io/C}} = s_1.K_1.\varepsilon^{s_1.0} + s_2 K_2.\varepsilon^{s_2.0}$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{Io}{C} = s_1 K_1 + s_2 K_2 \tag{4.59}$$

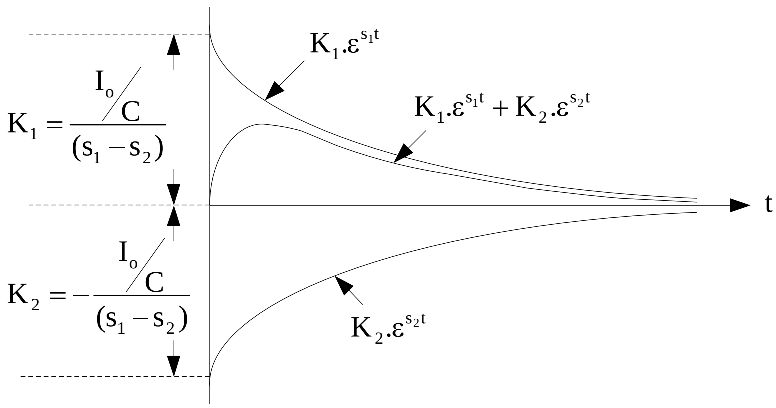
dari Persamaan (4.58) dan (4.59) diperoleh :

$$K_1 = \frac{Io/C}{(s_1 - s_2)} \quad \text{dan} \quad K_2 = -\frac{Io/C}{(s_1 - s_2)}$$

bilamana harga K_1 dan K_2 disubstitusikan kedalam Persamaan (4.55), maka didapat bentuk persamaan tegangan v pada rangkaian Gambar 4.5 bilamana saklar dibuka pada t = 0 adalah :

$$v = \frac{Io/C}{(s_1 - s_2)}\left(\varepsilon^{s_1 t} + \varepsilon^{s_2 t}\right) \tag{4.60}$$

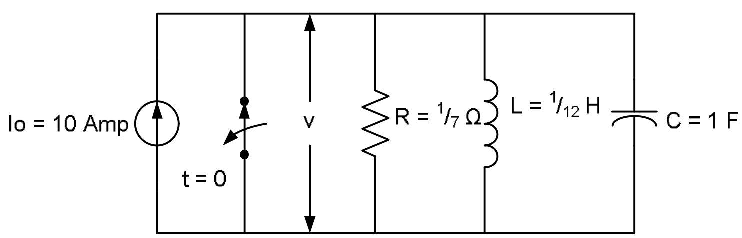
Persamaan (4.60) ini bentuknya sama dengan Persamaan (4.28) untu rangkaian seri RLC dimana bagian $^{Vo}/_{L}$ digantikan dengan $^{Io}/_{C}$, demikian juga kurva pada Gambar 4.2, berlaku pada persamaan (4.60) hanya dengan menggantikan perpotongan kurva dengan sumbu y digantikan dengan $\frac{Io / C}{(s_1 - s_2)}$ seperti kurva berikut ini.



Gambar 4.6 Kurva tegangan pada rangkaian paralel RLC dengan input searah pada kondisi $G^2 > \frac{4C}{L}$

Contoh :

Perhatikan rangkaian ini :



dengan mengabaikan semua kondisi awal elemen pasif, maka pada t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan tegangan v, dan berapa besar tegangan v setelah saklar dibuka selama 0,1 detik.

Jawab :

Persamaan arus pada rangkaian setelah saklar dibuka adalah :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \qquad \text{(a)}$$

atau :

$$1\frac{dv}{dt} + \frac{1}{1/7}.v + \frac{1}{1/12}\int v\,dt = 10$$

atau :

$$\frac{dv}{dt} + 7.v + 12\int v\,dt = 10$$

bila dideferensialkan satu kali, maka diperoleh :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7\frac{dv}{dt} + 12\,v = 0$$

atau :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 7\frac{d}{dt} + 12\right).v = 0$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$, maka :

$$\left(s^2 + 7s + 12\right)v = 0$$

atau :

$$s^2 + 7s + 12 = 0$$

akar-akar persamaan ini adalah :

$$s_1 = \frac{-7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7^2 - 4.1.12} = -3$$

$$s_2 = \frac{-7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7^2 - 4.1.12} = -4$$

selanjutnya :

$$G^2 = (7)^2 = 49 \quad \text{dan} \quad \frac{4C}{L} = \frac{4.1}{(1/12)} = 12$$

maka : $G^2 > \frac{4C}{L}$, sehingga bentuk umum penyelesaian Persamaan (a) adalah Persamaan (147), yaitu :

$$v = K_1.\varepsilon^{s_1 t} + K_2.\varepsilon^{s_2 t} \qquad \text{(b)}$$

dimana : s_1 = -3 dan s_2 = -4, sehingga Persamaan (b) menjadi :

$$v = K_1.\varepsilon^{-3t} + K_2.\varepsilon^{-4t} \qquad \text{(c)}$$

Apabila saklar dibuka pada t = 0, maka :

$$v(0+) = 0 \qquad \text{(d)}$$

hal ini disebabkan oleh karena sifat dari C tidak dapat berubah dengan seketika, demikian juga karena sifat dari L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka arus yang mengalir pada L pada t = 0, yaitu :

$$\frac{1}{L}\int v\,dt = 0 \qquad \text{(e)}$$

kalau Persamaan (d) dan (e) disubstitusikan kedalam Persamaan (a) untuk t = 0, maka :

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\downarrow\, 0} = Io$$

atau :

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} = \frac{10}{1} = 10 \text{ volt / det} \qquad (f)$$

Selanjutnya apabila Persamaan (d) disubtitusikan ke dalam Persamaan (c) pada t = 0, akan diperoleh :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \; 0} = K_1.\varepsilon^{-3.0} + K_2.\varepsilon^{-4.0}$$

atau :

$$K_1 + K_2 = 0 \qquad (g)$$

Kemudian bilamana Persamaan (c) diferensialkan satu kali, akan diperoleh :

$$\frac{dv}{dt} = -3.K_1.\varepsilon^{-3t} - 4K_2.\varepsilon^{-4t}$$

dan apabila Persamaan (f) disubstitusikan ke dalam persamaan ini untuk t = 0, maka :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow \; 10} = -3.K_1.\varepsilon^{-3.0} - 4K_2.\varepsilon^{-4.0}$$

atau :

$$-3K_1 - 4K_2 = 10 \qquad (h)$$

dari Persamaan (g) dan (h) diperoleh :

$$K_1 = 10 \text{ dan } K_2 = -10$$

bilamana harga K_1 dan K_2 ini disubstitusikan kedalam Persamaan (c), maka didapat bentuk persamaan tegangan v bilamana saklar dibuka pada t = 0 adalah :

$$v = 10\left(\varepsilon^{-3.t} - \varepsilon^{-4t}\right) \text{ volt}$$

sedangkan besar tegangan v setelah saklar dibuka selama 0,1 detik adalah :

$$\underline{v_{(0,1det)} = 10\left(\varepsilon^{-3.(0,1)} - \varepsilon^{-4(0,1)}\right) = 0,705 \quad \text{volt}}$$

Kemungkinan II : $\mathbf{G^2 = \frac{4C}{L}} \rightarrow$ **dimana β adalah nol dan $s_1 = s_2$**

Adapun akar-akar :

$$s_1 = \frac{-G}{2C} + \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - \frac{4C}{L}} \quad \text{dan} \quad s_2 = \frac{-G}{2C} - \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - \frac{4C}{L}}$$

dimana :

$$\alpha = \frac{-G}{2C} \quad \text{dan} \quad \beta = \frac{1}{2C}\sqrt{G^2 - \frac{4C}{L}}$$

akan tetapi karena : $G^2 = \frac{4C}{L}$, maka : $\beta = 0$, sehingga : $s_1 = s_2 = \alpha = \frac{-G}{2C}$, dengan demikian Persamaan (4.49) menjadi :

$$(s-\alpha)(s-\alpha)v = 0 \tag{4.61}$$

kalau dimisalkan :

$$(s-\alpha)v = u \tag{4.62}$$

maka Persamaan (4.61) menjadi :

$$(s-\alpha)u = 0$$

karena : $\frac{d}{dt} = s$, maka persamaan di atas menjadi :

$$\frac{du}{dt} - \alpha\, u = 0$$

atau :

$$\frac{du}{u} = \alpha\ dt$$

kalau diintegralkan :

$$\int \frac{du}{u} = \int \alpha\ dt$$

atau :

$$\text{Ln}\,(u) = \alpha\, t + K'$$

atau :

$$u = \varepsilon^{\alpha\, t + K'}$$

atau :

$$u = \varepsilon^{\alpha\, t}\varepsilon^{K'}$$

dan karena $\varepsilon^{K'} = K$, maka :

$$u = K\varepsilon^{\alpha\, t}$$

dengan demikian Persamaan (4.62) menjadi :

$$(s-\alpha)v = K\varepsilon^{\alpha\, t} \tag{4.63}$$

karena $\frac{d}{dt} = s$, maka Persamaan (4.63) menjadi :

$$\frac{dv}{dt} - \alpha\, v = K\varepsilon^{\alpha\, t}$$

kalau dikalikan dengan faktor integrasi : $\varepsilon^{-\alpha t}$, maka persamaan di atas menjadi :

$$\varepsilon^{-\alpha\, t}\,\frac{dv}{dt} - \alpha\, v.\varepsilon^{-\alpha\, t} = K \tag{4.64}$$

karena :

$$d(v.\varepsilon^{-\alpha\, t}) = \varepsilon^{-\alpha\, t}\,\frac{dv}{dt} - \alpha\, v.\varepsilon^{-\alpha\, t}$$

maka Persamaan (4.64) menjadi :

$$d(v.\varepsilon^{-\alpha t}) = K$$

bila diintegralkan :

$$\int d(v.\varepsilon^{-\alpha t}) = K\int dt$$

atau :

$$v.\varepsilon^{-\alpha t} = Kt + K'$$

bila dikalikan dengan $\varepsilon^{\alpha t}$, maka :

$$v = K.t.\varepsilon^{\alpha t} + K'.\varepsilon^{\alpha t}$$

kalau dimisalkan :

$$K_1 = K' \quad \text{dan } K_2 = K$$

maka persamaan di atas menjadi :

$$v = K_1.\varepsilon^{\alpha t} + K_2.t.\varepsilon^{\alpha t} \tag{4.65}$$

dimana $\alpha = \frac{-G}{2C}$, dan Persamaan (4.65) ini adalah bentuk penyelesaian umum dari Persamaan (4.45) untuk kondisi $G^2 = \frac{4C}{L}$, dimana K_1 dan K_2 dapat dicari dari kondisi awal rangkaian.

Adapun kondisi awal dari rangkaian seperti pada Persamaan (4.56) yaitu :

$$v(0+) = 0 \tag{4.66}$$

dan Persamaan (4.57) yaitu :

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} \tag{4.67}$$

Selanjutnya apabila Persamaan (4.66) disubtitusikan ke dalam Persamaan (4.65) untuk t = 0 akan diperoleh :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} = K_1.\varepsilon^{\alpha.0} + K_2.0.\varepsilon^{\alpha.0}$$

atau :

$$K_1 = 0 \tag{4.68}$$

Kemudian diferensialkan Persamaan (4.65) satu kali :

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.K_1.\varepsilon^{\alpha.t} + \alpha K_2.\varepsilon^{\alpha.t} + \alpha K_2.t.\varepsilon^{\alpha.t}$$

bilamana Persamaan (4.67) dan (4.68) disubstitusikan kedalam persamaan di atas untuk t = 0, akan diperoleh :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow\ Io/C} = \alpha.\underbrace{K_1}_{\downarrow\ 0}.\varepsilon^{\alpha.0} + \alpha K_2.\varepsilon^{\alpha.0} + \alpha K_2.0.\varepsilon^{\alpha.0}$$

sehingga diperoleh :

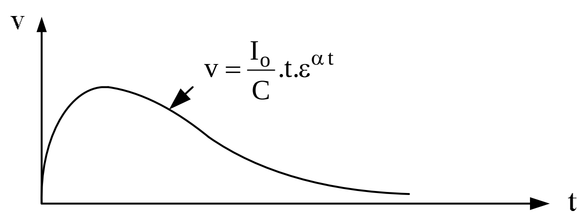
$$K_2 = \frac{Io}{C} \qquad (4.69)$$

selanjutnya bilamana harga K1 dan K2 dari Persamaan (4.68) dan (4.69) disubstitusikan kedalam Persamaan (4.65), maka diperoleh persamaan tegangan v pada rangkaian Gambar 4.5, untuk kondisi $G^2 = \frac{4C}{L}$ sebagai berikut :

$$v = \frac{I_o}{C}.t.\varepsilon^{\alpha t} \qquad (4.70)$$

dengan : $\alpha = \frac{-G}{2C}$

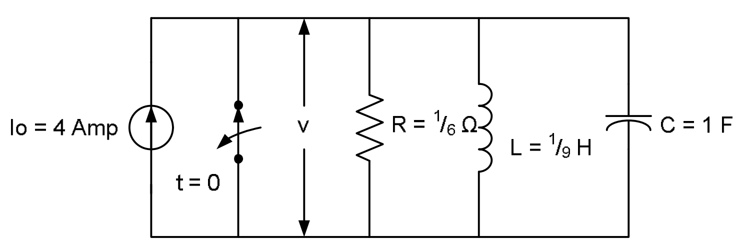
Adapun kurva dari Persamaan (4.70) ini adalah :



Gambar 4.7 Kurva arus pada rangkaian paralel RLC dengan input arus searah pada kondisi $G^2 = \frac{4C}{L}$

Contoh :

Perhatikan rangkaian berikut ini :



dengan mengabaikan semua kondisi awal dari elemen pasif, maka pada saat t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan tegangan v dan berapa besar v setelah saklar terbuka selama 0,1 detik.

Jawab :

Adapun persamaan arus pada rangkaian setelah saklar dibuka ialah :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \qquad \text{(a)}$$

atau :

$$1\frac{dv}{dt} + \frac{1}{1/6}.v + \frac{1}{1/9}\int v\,dt = 4$$

atau :

$$\frac{dv}{dt} + 6.v + 9\int v\,dt = 4$$

bila dideferensialkan satu kali, maka diperoleh :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 6\frac{dv}{dt} + 9\,v = 0$$

atau :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 6\frac{d}{dt} + 9\right).v = 0$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$, maka :

$$\left(s^2 + 6s + 9\right).v = 0$$

atau :

$$s^2 + 6s + 9 = 0$$

akar-akar persamaan ini adalah :

$$s_1 = \frac{-6}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6^2 - 4.1.9} = -3 \quad \text{dan} \quad s_2 = \frac{-6}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6^2 - 4.1.9} = -3$$

terlihat bahwa :

$$G^2 = (6)^2 = 36 \quad \text{dan} \quad \frac{4C}{L} = \frac{4.1}{(1/9)} = 36$$

maka : $G^2 = \frac{4C}{L}$, sehingga bentuk umum penyelesaian Persamaan (a) adalah Persamaan (4.65), yaitu :

$$v = K_1.\varepsilon^{\alpha t} + K_2.t.\varepsilon^{\alpha t}$$

dengan $\alpha = \frac{-G}{2C} = \frac{-(6)}{2.1} = -3$, sehingga :

$$v = K_1.\varepsilon^{-3t} + K_2.t.\varepsilon^{-3t} \qquad \text{(b)}$$

Apabila saklar dibuka pada saat t = 0, maka :

$$v(0+) = 0 \qquad \text{(c)}$$

hal ini disebabkan karena sifat dari C yang tidak dapat berubah dengan seketika, demikian juga halnya dengan L yang tidak dapat berubah dengan seketika, maka arus yang mengalir pada L pada t = 0 juga nol,sehingga :

$$\frac{1}{L}\int v\,dt = 0 \qquad \text{(d)}$$

kalau Persamaan (d) dan (e) disubstitusikan kedalam Persamaan (a) untuk t = 0, maka didapat:

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\downarrow \atop 0} = Io$$

atau :

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} = \frac{4}{1} = 4 \text{ volt / det} \qquad \text{(e)}$$

Selanjutnya apabila Persamaan (c) disubtitusikan ke dalam Persamaan (b) untuk t = 0, maka diperoleh :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} = K_1.\varepsilon^{-3.0} + K_2.0.\varepsilon^{-4.0}$$

maka diperoleh :

$$K_1 = 0 \qquad \text{(f)}$$

Selanjutnya diferensialkan Persamaan (b) satu kali :

$$\frac{dv}{dt} = -3.K_1.\varepsilon^{-3t} + K_2.\varepsilon^{-3t} - 3.K_2.t.\varepsilon^{-3t}$$

kemudian substitusikan Persamaan (e) dan (f) ke dalam persamaan di atas pada t = 0, sehingga diperoleh :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow \atop 4} = -3.\underbrace{K_1}_{\downarrow \atop 0}.\varepsilon^{-3.0} + K_2.\varepsilon^{-3.0} - 3K_2.\varepsilon^{-3.0}$$

maka diperoleh :

$$K_2 = 4 \qquad \text{(g)}$$

Substitusikan harga-harga K_1 dan K_2 pada Persamaan (f) dan (g) ke dalam Persamaan (b), sehingga diperoleh bentuk persamaan tegangan v pada rangkaian untuk kondisi $G^2 = \frac{4C}{L}$ adalah :

$$\underline{v = 4.t.\varepsilon^{-3.t} \quad \text{volt}}$$

setelah saklar dibuka selama 0,1 detik, maka besar tegangan V adalah :

$$\underline{v_{(0,1\det)} = 4.(0,1).\varepsilon^{-3.0,1} = 0,296 \quad \text{volt}}$$

Kemungkinan III : $\mathbf{G^2 < \frac{4C}{L} \rightarrow}$ **harga β adalah negatif dimana s_1 dan s_2 kompleks**

Dalam keadaan ini $\beta = \sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}$, sedangkan $\alpha = \frac{-G}{2C}$, maka akar-akar merupakan bilangan kompleks :

$$s_1 = (\alpha + j\beta) \text{ dan } s_2 = (\alpha - j\beta)$$

selanjutnya akar-akar ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.55) sehingga didapat :

$$v = K_1.\varepsilon^{(\alpha + j\beta)t} + K_2.\varepsilon^{(\alpha - j\beta)t}$$

atau :

$$v = K_1.\varepsilon^{\alpha.t}\varepsilon^{j\beta t} + K_2.\varepsilon^{\alpha.t}\varepsilon^{-j\beta t}$$

atau :

$$v = \varepsilon^{\alpha.t}\left(K_1.\varepsilon^{j\beta t} + K_2.\varepsilon^{-j\beta t}\right) \qquad (4.71)$$

menurut rumus Euler's bahwa :

$$\varepsilon^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t \quad \text{dan} \quad \varepsilon^{-j\beta t} = \cos\beta t - j\sin\beta t$$

maka Persamaan (4.71) menjadi :

$$v = \varepsilon^{\alpha.t}\left[K_1.(\cos\beta t + j\sin\beta t) + K_2.(\cos\beta t - j\sin\beta t)\right] \qquad (4.72)$$

menurut Persamaan (4.56) pada t = 0 :

$$v(0+) = 0 \qquad (4.73)$$

selanjutnya menurut Persamaan (4.57) pada t = 0 :

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} \qquad (4.74)$$

dan kalau harga ini disubstitusikan kedalam Persamaan (4.72) untuk t = 0, diperoleh :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \, 0} = \varepsilon^{\alpha.0}\left[K_1.(\cos\beta.0 + j\sin\beta.0) + K_2.(\cos\beta.0 - j\sin\beta.0)\right]$$

atau :

$$K_1 + K_2 = 0 \tag{4.75}$$

Selanjutnya diferensialkan Persamaan (4.72) satu kali :

$$\frac{dv}{dt} = \begin{array}{l} \alpha\varepsilon^{\alpha.t}\left[K_1.(\cos\beta t + j\sin\beta t) + K_2.(\cos\beta t - j\sin\beta t)\right] + \\ \varepsilon^{\alpha.t}\left[K_1.(-\sin\beta t + j\cos\beta t) + K_2.(-\sin\beta t - j\cos\beta t)\right] \end{array} \tag{4.76}$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (4.74) ke dalam Persamaan (7.76) untuk t = 0, maka didapat :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow \; Io/C} = \begin{array}{l} \alpha\varepsilon^{\alpha.0}\left[K_1.(\cos\beta.0 + j\sin\beta.0) + K_2.(\cos\beta.0 - j\sin\beta.0)\right] + \\ \varepsilon^{\alpha..0}\left[K_1.(-\sin\beta.0 + j\cos\beta.0) + K_2.(-\sin\beta.0 - j\cos\beta.0)\right] \end{array}$$

atau :

$$\frac{Io}{C} = \alpha(K_1 + K_2) + j\beta(K_1 - K_2) \tag{4.77}$$

kalau Persamaan (4.75) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.77), akan diperoleh :

$$\frac{Io}{C} = j2\beta K_1 \tag{4.78}$$

dari Persamaan (4.75) dan (4.77) diperoleh :

$$K_1 = \frac{Io}{j2\beta C} \tag{4.79}$$

dan :

$$K_2 = -\frac{Io}{j2\beta C} \tag{4.80}$$

selanjutnya substitusikan Persamaan (4.79) dan (4.80) kedalam Persamaan (4.72) akan diperoleh :

$$v = \varepsilon^{\alpha.t}\left[\frac{Io}{j2\beta C}.(\cos\beta t + j\sin\beta t) - \frac{Io}{j2\beta C}.(\cos\beta t - j\sin\beta t)\right] \tag{4.81}$$

atau :

$$v = \varepsilon^{\alpha t}\frac{Io}{\beta C}\sin\beta t \tag{4.82}$$

maka diperoleh persamaan tegangan v pada rangkaian Gambar 4.5, untuk kondisi $G^2 < \frac{4C}{L}$ dimana $\beta = \sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}$, seandainya harga α dan β disubtitusikan ke dalam Persamaan (4.82), akan diperoleh :

$$v = \frac{Io}{C}\frac{\varepsilon^{-\frac{G}{2C}t}}{\sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}\right)t$$

atau :

$$v = \frac{Io}{C}\frac{2C}{\sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}}\varepsilon^{-\frac{G}{2C}t}\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4C}{L} - G^2}}{2C}\right)t$$

atau :

$$v = \frac{Io}{C}\frac{2C}{2\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{G^2}{4}}}\varepsilon^{-\frac{G}{2C}t}\sin\left(\frac{2C\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}}}{2C}\right)t$$

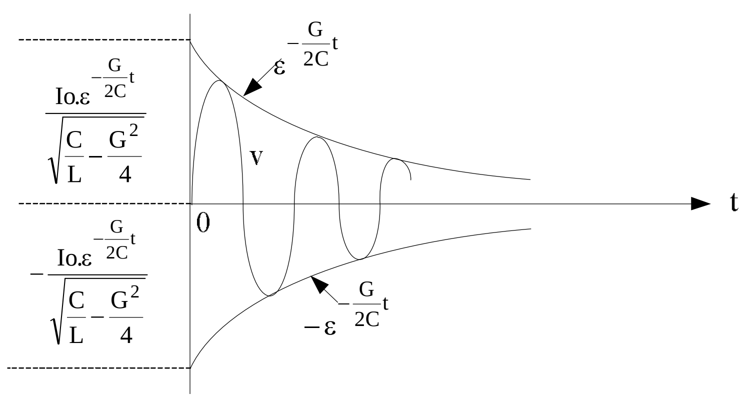
atau :

$$v = \frac{Io.\varepsilon^{-\frac{G}{2C}t}}{\sqrt{\frac{C}{L} - \frac{G^2}{4}}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}}\right)t \tag{4.83}$$

terlihat v merupakan osilasi tegangan berbentuk sinus yang amplitudonya tidak konstan dan menurun secara eksponensial dengan konstanta waktu $\frac{2C}{G}$ dengan frekuensi ayunan (*angular frequency*) :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{G^2}{4C^2}} \ \text{rad/det} \tag{4.84}$$

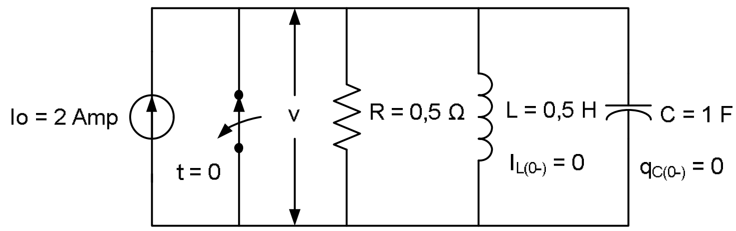
kalau Persamaan (4.83) digambarkan kurvanya adalah :



Gambar 4.8 Kurva tegangan pada rangkaian paralel RLC dengan input arus searah pada kondisi $G^2 < \frac{4C}{L}$

<u>Contoh :</u>

Perhatikan rangkaian di bawah ini :



pada saat t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan tegangan v pada rangkaian.

Jawab :

Adapun persamaan arus pada rangkaian setelah saklar dibuka ialah :

$$C\frac{dv}{dt} + G.v + \frac{1}{L}\int v\,dt = Io \qquad \text{(a)}$$

bila Persamaan (a) dideferensialkan satu kali, maka didapat L :

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + G\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0 \qquad \text{(b)}$$

dengan mensibtusikan harga-harga C, G dan L maka diperoleh :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt} + 2.v = 0 \qquad \text{(c)}$$

misalkan : $\frac{d}{dt} = s$, maka Persamaan (c) menjadi :

$$\left(s^2 + 2s + 2\right)v = 0 \qquad \text{(d)}$$

atau :

$$s^2 + 2s + 2 = 0 \qquad \text{(e)}$$

adapun akar-akar Persamaan (e) adalah :

$$s_1 = -\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - 4.2.1} = -1 + j1$$

$$s_2 = -\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2^2 - 4.2.1} = -1 - j1$$

dari rangkaian terlihat bahwa :

$$G^2 = \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^2 = 4 \quad \text{dan} \quad \frac{4C}{L} = \frac{4.1}{0{,}5} = 8$$

sehingga ternyata bahwa $G^2 < \frac{4C}{L}$, maka bentuk umum penyelesaian Persamaan (a) adalah Persamaan (4.55) dengan mensubstitusikan harga-harga s_1 dan s_2 ke dalam Persamaan (4.55) ini akan diperoleh :

$$v = K_1.\varepsilon^{(-1+j1)t} + K_2.\varepsilon^{(-1-j1)t}$$

atau :

$$v = \varepsilon^{-t}\left(K_1.\varepsilon^{jt} + K_2.\varepsilon^{-jt}\right)$$

karena :

$$\varepsilon^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t \quad \text{dan} \quad \varepsilon^{-j\beta t} = \cos\beta t - j\sin\beta t$$

maka :

$$v = \varepsilon^{-t}\left[K_1.(\cos t + j\sin t) + K_2.(\cos t - j\sin t)\right]$$

atau :

$$v = \varepsilon^{-t}\left[(K_1 + K_2)\cos t + (jK_1 - jK_2)\sin t\right]$$

bila dimisalkan :

$$(K_1 + K_2) = K_3 \quad \text{dan} \quad (jK_1 - jK_2) = K_4$$

maka :

$$v = \varepsilon^{-t}(K_3.\cos t + K_4.\sin t) \qquad \text{(f)}$$

Karena tegangan pada C tidak dapat berubah dengan seketika, maka menurut Persamaan (4.56), maka v(0+) = 0, dan demikian pula halnya arus pada L tidak dapat berubah dengan seketika, maka $\frac{1}{L}\int v\,dt = 0$, selanjutnya apabila harga ini disubstitusikan ke dalam Persamaan (a) untuk t = 0, maka diperoleh :

$$C\frac{dv}{dt}(0+) + G.\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{\frac{1}{L}\int v(0+)\,dt}_{\downarrow \atop 0} = Io$$

sehingga diperoleh :

$$\frac{dv}{dt}(0+) = \frac{Io}{C} = \frac{2}{1} = 2 \text{ volt/det} \qquad \text{(g)}$$

Selanjutnya bila harga v(0+) = 0 disubtitusikan ke dalam Persamaan (f) akan diperoleh :

$$\underbrace{v(0+)}_{\downarrow \atop 0} = \varepsilon^{-0}(K_3.\cos 0 + K_4.\sin 0)$$

maka diperoleh :

$$K_3 = 0 \qquad (h)$$

apabila harga K_3 ini disubstitusikan kedalam Persamaan (f), maka didapat :

$$v = \varepsilon^{-t}\left(0.\cos t + K_4.\sin t\right)$$

atau :

$$v = \varepsilon^{-t}.K_4.\sin t \qquad (i)$$

bilamana persamaan (i) dideferensialkan satu kali maka didapat :

$$\frac{dv}{dt} = -\varepsilon^{-t}.K_4.\sin t + \varepsilon^{-t}.K_4.\cos t$$

atau :

$$\frac{dv}{dt} = -\varepsilon^{-t}.K_4\left(\cos t - \sin t\right) \qquad (j)$$

Apabila Persamaan (g) disubstitusikan ke dalam Persamaan (j) untuk t = 0, diperoleh :

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}(0+)}_{\downarrow \atop 2} = -\varepsilon^{-0}.K_4\left(\cos 0 - \sin 0\right)$$

sehingga diperoleh :

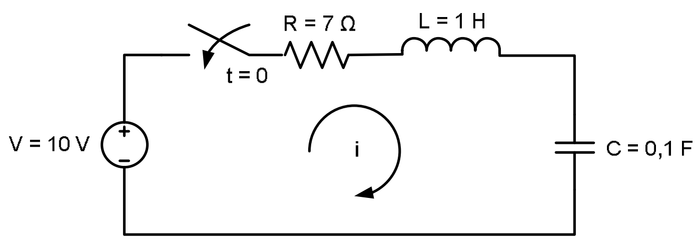
$$K_4 = 2 \qquad (k)$$

dan bilamana harga-harga K_3 dan K_4 disubstitusikan kedalam Persamaan (f) maka diperoleh bentuk persamaan tegangan v bilamana saklar dibuka pada saat t = 0 adalah :

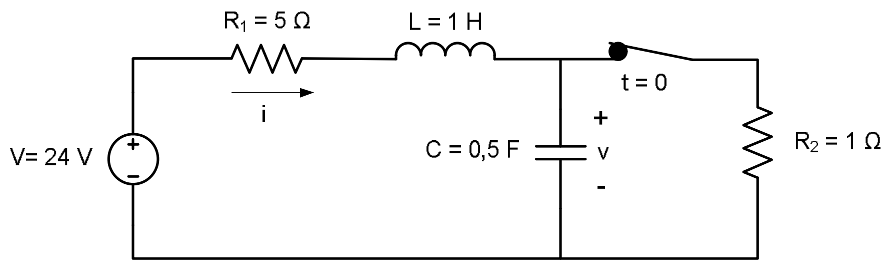
$$\underline{v = 2\varepsilon^{-t}\sin t}$$

4.4 Soal Latihan

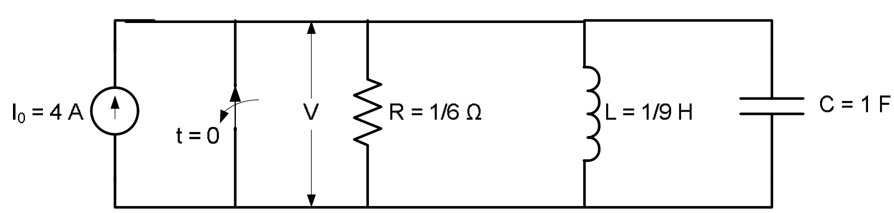
1. Dengan mengabaikan semua kondisi awal, maka carilah bentuk persamaan arus i setelah saklar ditutup dan cari juga besar arus pada rangkaian setelah saklar ditutup selema 0,1 detik



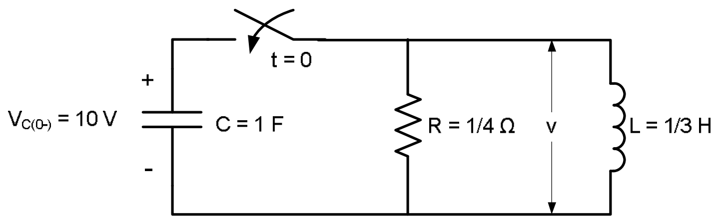
2. Rangkaian di bawah ini sudah dalam keadaan steady state maka pada t = 0 saklar dibuka. Carilah bentuk persamaan v dan i setelah saklar dibuka.



3. Rangkaian di bawah sudah mencapai keadaan steady state, pada saat t = 0 saklar dibuka, carilah bentuk persamaan v setelah saklar dibuka dan cari juga besar v setelah saklar dibuka selama 0,2 detik.



4. Perhatikan rangkaian di bawah ini carilah persamaan v pada rangkaian di bawah ini.


t = 0
+
VC(0-) = 10 V
C = 1 F
-
R = 1/4 Ω
v
L = 1/3 H