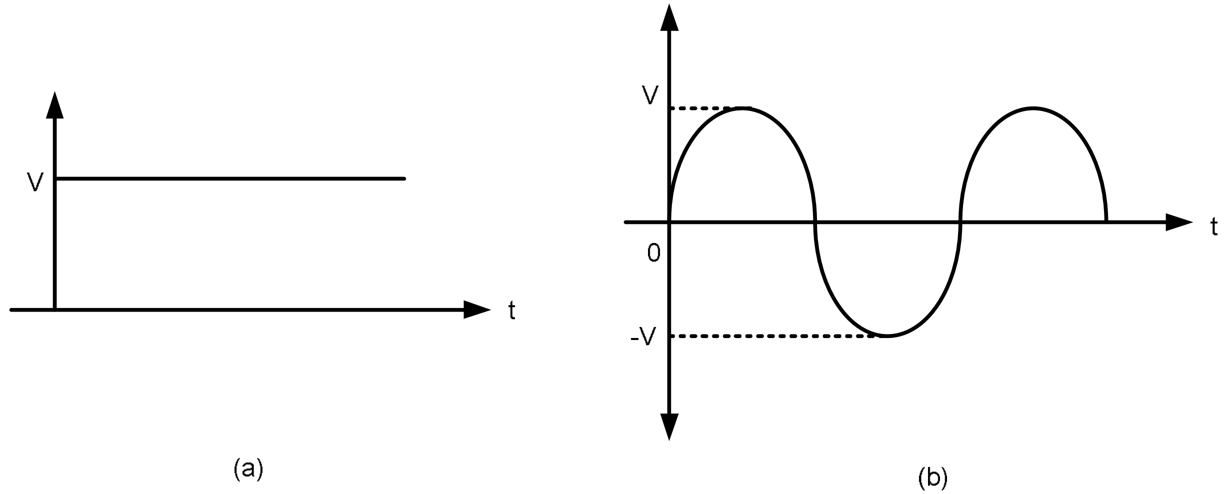
BAB 9
DERET FOURIER

Oleh :

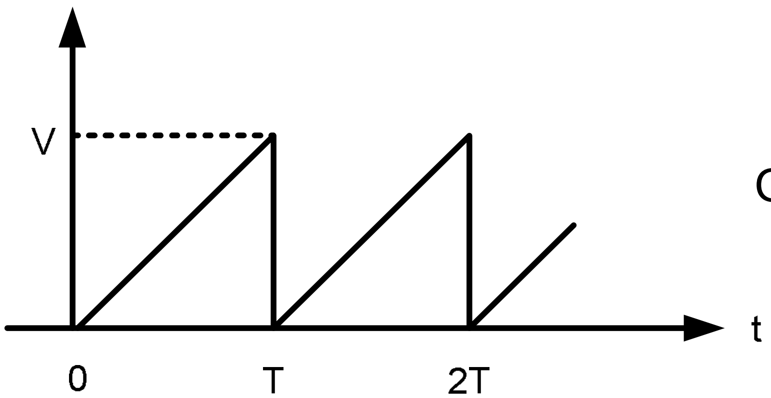
Ir. A.Rachman Hasibuan dan

Naemah Mubarakah, ST

9.1 Pendahuluan



Gambar 9.1 Fungsi-fungsi eksistesi (a) v = konstan ; (b) v = V sin ωt



Gambar 9.2 Gelombang gigi gergaji

Gelombang gergaji ini dapat dinyatakan sebagai $f(t) = (V/T)t$ dalam interval $0 < t < T$ dan oleh $f(t) = (V/T)(t - T)$ dalam interval $T < t < 2T$.

9.2 Deret Fourier Trigonometri

Suatu fungsi f (t) dikatakan periodik apabila :

$$f(t) = f(t + nT)$$

dimana n adalah bilangan bulat/integer dan T adalah periode dari f (t),

Menurut teori Fourier setiap fungsi periodik dengan frekuensi ω_o dapat di ekspresikan sebagai perjumlahan dari fungsi sinus ataupun kosinus atau :

$$f(t) = \underbrace{a_o}_{\downarrow \, dc} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t)}_{\downarrow \, ac}$$

$\omega_o = 2\pi/T$ disebut sebagai frekuensi dasar

sin $n\omega$ot atau cos $n\omega$ot merupakan harmonisa yang ke-n dari f (t) dan bila n merupakan bilangan ganjil disebut harmonisa ganjil dan bila genap disebut harmonisa genap

Suatu fungsi f(t) dapat dinyatakan dengan sebuah deret Fourier apabila :

1. f(t) memiliki nilai tunggal untuk setiap t.
2. Jika f(t) tidak kontinyu maka hanya terdapat jumlah diskontinuitas terbatas pada periode T.
3. Memiliki jumlah maksimum dan minimum yang terbatas dalam periode.
4. $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,|\,dt < \infty$ Untuk setiap t_0.

syarat-syarat ini disebut sebagai syarat Dirichlet

Adapun proses untuk menentukan koefisien a_o ; a_n dan b_n disebut sebagai analisa. Fourier, dimana dalam analisa Fourier ini ada beberapa bentuk integral trigonometri yang sangat membantu diantaranya :

$$\int_0^T \sin n\omega_o \, dt = 0 \rightarrow \text{semua } n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_o \, dt = 0 \rightarrow \text{semua } n \neq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$\int_0^T \sin n\omega_o t \cos n\, n\omega_o t \, dt = 0 \rightarrow \text{semua } n, m \ldots. (c)$$

$$\int_0^T \sin n\omega_o \sin n\omega_o t \, dt = 0 \rightarrow n \neq m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_o \cos m\omega_o t \, dt = 0 \rightarrow n \neq m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_o \, dt = T/2 \rightarrow \text{semua } n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

$$\int_0^T \cos^2 m\omega_o t \, dt = T/2 \rightarrow \text{semua } m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

Dari analisa Fourir, didapat :

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_o t\,dt$$ dan $$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_o t\,dt$$

Maka :

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t + \phi_n)$$

$$a_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t + \phi n) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\phi_n)\cos n\omega_o t - (A_n \sin\phi_n)\sin n\omega_o t$$

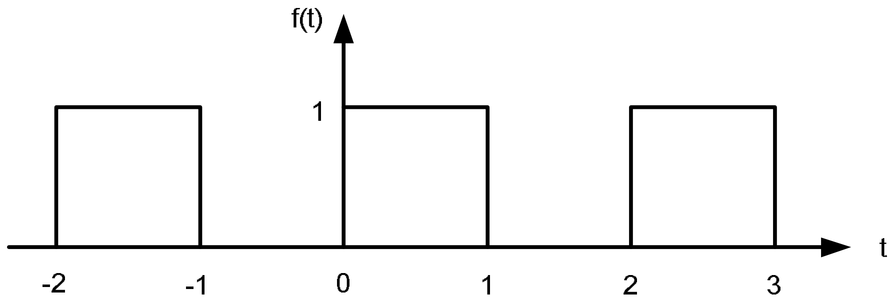
Sehingga :

$$a_n = A_n \cos\phi_n \quad ; \quad b_n = -(A_n \sin\phi_n) \quad ; \quad A_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} \quad ; \quad \phi_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$

dalam bentuk kompleks : $$A_n \angle \phi_n = a_n - jb_n$$

Contoh :

Carilah bentuk deret Fourier gelombang dibawah ini dan gambarkan juga spektrum amplitudo dan spektrum fasa dari gelombang tersebut.



Jawab :

Adapun deret Fourier :

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_o t + b_n \sin n\omega_o t)$$

Adapun bentuk persamaan gelombang diatas :

$$f(t) = \begin{cases} 1 \rightarrow 0 < t < 1 \\ 0 \rightarrow 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1\,dt + \int_0^2 0\,dt\right] = \frac{1}{2}\,t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_o t\,dt = \frac{2}{2}\left[\underbrace{\int_0^1 1\cos n\pi t\,dt}_{\frac{1}{n\pi}\sin \pi t\Big|_0^1} + \underbrace{\int_1^2 0\cos n\pi t\,dt}_{0}\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_o t\,dt = \frac{2}{2}\left[\underbrace{\int_0^1 1\sin n\pi t\,dt}_{-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\Big|_0^1} + \underbrace{\int_1^2 0\sin n\pi t\,dt}_{0}\right] = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} \rightarrow \text{untuk harga n ganjil} \\ 0 \rightarrow \text{untuk harga n genap} \end{cases}$$

Harga-harga a_0, a_n dan b_n yang telah diperoleh disubstitusikan ke persamaan umum deret fourier, maka deret Fourier dari bentuk gelombang diatas adalah :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \ldots$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t \;\rightarrow \text{dalam hal ini} : n = 2k - 1$$

untuk mendapatkan spektrum amplitudo dan spektrum fasa :

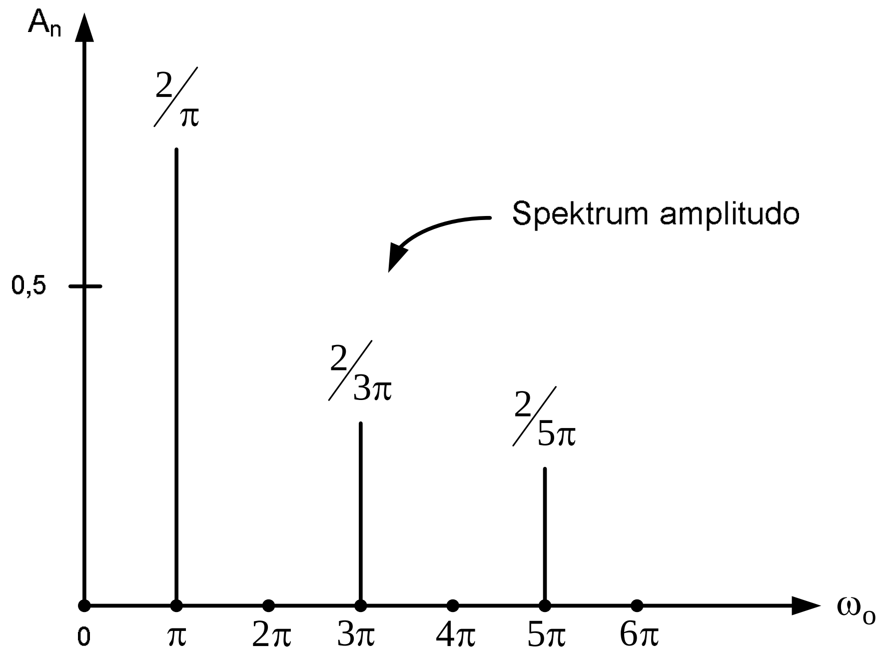
$$An = \sqrt{\underbrace{a_n}_{\downarrow\, 0}{}^2 + \underbrace{b_n}_{\downarrow\, b_n = \frac{2}{n\pi} \rightarrow n \text{ ganjil}}{}^2} = |b_n| = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} \rightarrow n \text{ ganjil} \\ 0 \rightarrow n \text{ genap} \end{cases}$$

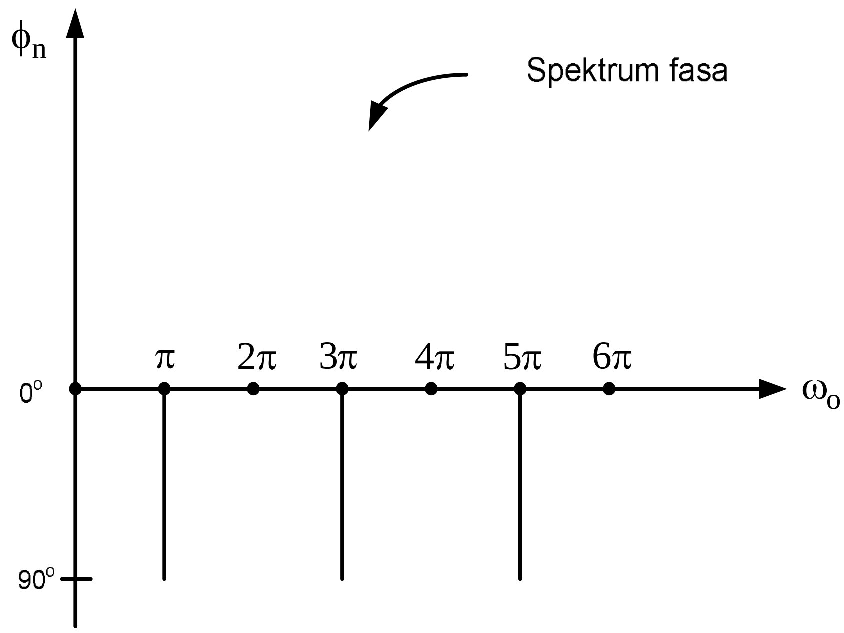
$$\phi_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} -90^\circ \rightarrow n \text{ genap} \\ 0^\circ \rightarrow n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Telah diketahui didepan bahwa $\omega 0 = \pi$ dan harga An dan ϕn untuk beberapa harga n maka hasilnya seperti pada tabel dibawah ini.

n	$An = \lvert b_n \rvert = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} \rightarrow \text{n ganjil} \\ 0 \rightarrow \text{n genap} \end{cases}$	$\phi_n = \begin{cases} -90^\circ \rightarrow \text{n genap} \\ 0^\circ \rightarrow \text{n ganjil} \end{cases}$
1	$\dfrac{2}{\pi}$	-90°
2	0	0°
3	$\dfrac{2}{3\pi}$	-90°
4	0	0°
5	$\dfrac{2}{5\pi}$	-90°
6	0	0°

maka spektrum amplitudo :

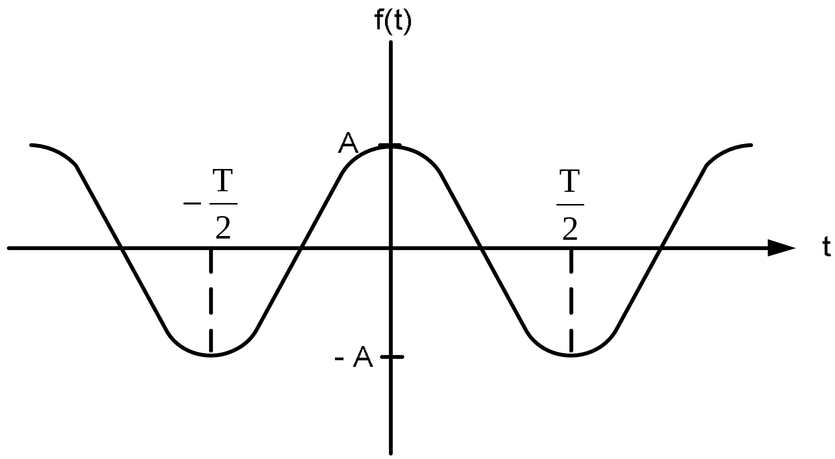




9.3 Kesimetrisan

9.3.1 Simetris Genap

$$f(t) = f(-t) \rightarrow \text{untuk semua harga } t$$



Gambar 9.3 Fungsi Genap

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= -A \rightarrow \text{untuk harga } t = T/2 \\ f(t) &= -A \rightarrow \text{untuk harga } t = -T/2 \end{aligned}\right\} \text{maka : } f(T/2) = f(-T/2)$$

Adapun sifat yang utama dari fungsi genap ini adalah :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t)dt = 2\int_{0}^{T/2} f_e(t)dt$$

dimana notasi e pada $f_e(t)$ untuk melambangkan fungsi genap (even).

didapat koefisien-koefisien Fourier-nya :

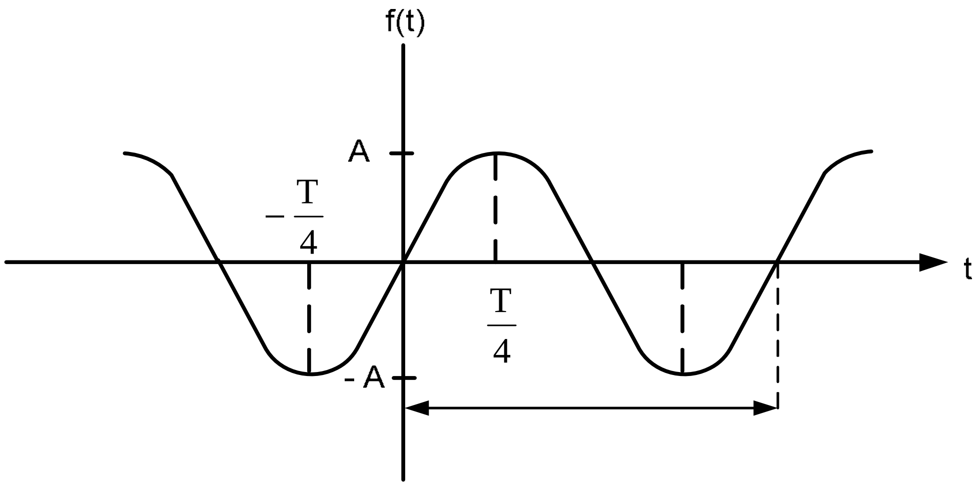
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt$$

$b_n = 0$

9.3.2 Simetris Ganjil

f(-t) = -f(t) → untuk semua harga t



Gambar 9.4 Fungsi Ganjil

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= A \rightarrow \text{untuk harga } t = \frac{T}{4} \\ f(t) &= -A \rightarrow \text{untuk harga } t = -\frac{T}{4} \end{aligned}\right\} \text{maka} : f(-\frac{T}{4}) = f(\frac{T}{4})$$

Adapun bentuk umum fungsi ini adalah :

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_o(t)dt = 0$$

dimana $f_o(t)$ hanya berupa simbol dari fungsi ganjil (Odd).

Untuk fungsi ganjil ini harga-harga :

$$A_0 = 0$$

$$an = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt$$

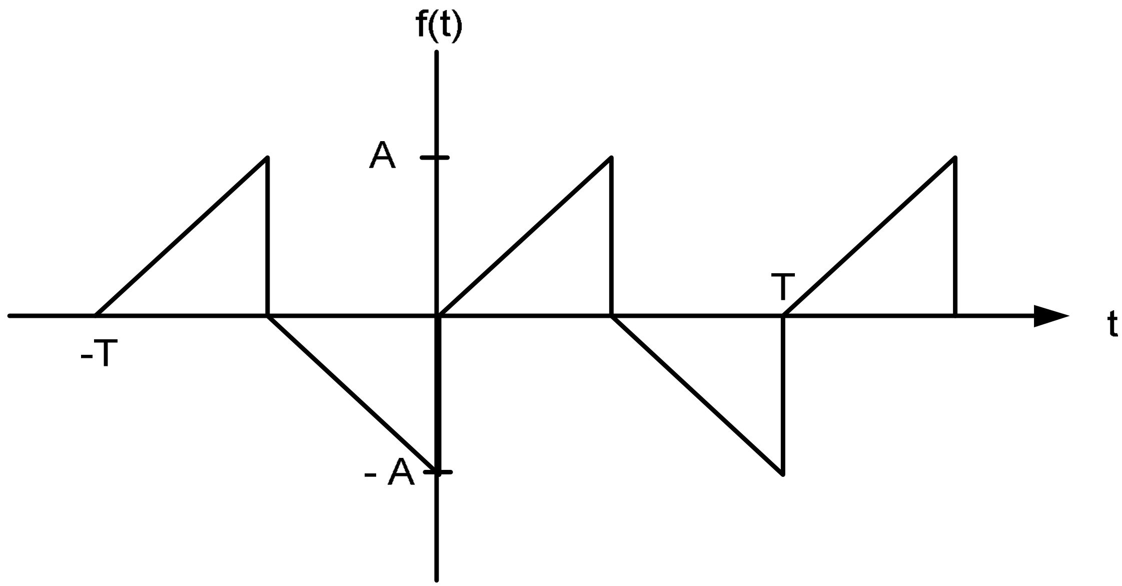
Setiap fungsi periodik f(t) dapat merupakan gabungan fungsi-fungsi genap atau ganjil saja ataupun gabungan fungsi genap atau ganjil

$$f(t) = \underbrace{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega_0 t}_{\substack{\downarrow \\ \text{genap}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t}_{\substack{\downarrow \\ \text{ganjil}}} = f_e(t) + f_o(t)$$

9.3.3 Simetris Gelombang Setengah

Suatu fungsi dikatakan simetris gelombang setengah apabila :

$$f(t-\frac{T}{2}) = -f(t) \rightarrow (\text{ganjil})$$



Gambar 9.5 Contoh gelombang setengah simetris (ganjil)

Koefisien Fourier nya :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\,dt\right] \longrightarrow a_0 = \frac{1}{T}\left[-\int_{0}^{T/2} f(x)\,dx + \int_{0}^{T/2} f(t)\,dt\right] = 0$$

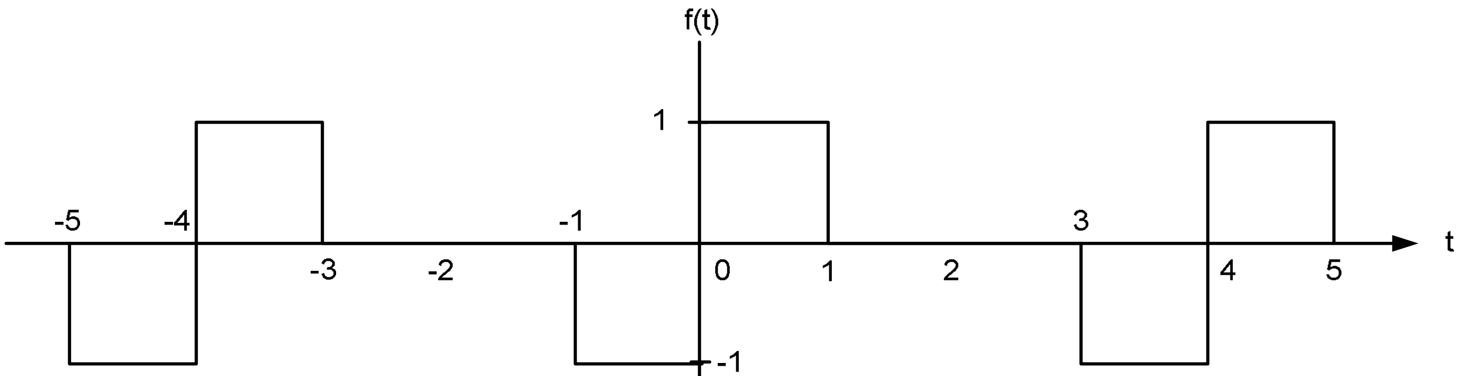
$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt + \int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt\right]$$

$$a_n = \frac{2}{T}\left[1-(-1)^n\right]\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{untuk n ganjil} \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{untuk n genap} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \ldots\ldots\ldots\ldots \text{untuk n ganjil} \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{untuk n genap} \end{cases}$$

Contoh :

Carilah deret Fourir dari f(t) yang tergambar di bawah ini :



Jawab :

Fungsi ini adalah fungsi ganjil sehingga $a_0 = 0 = a_n$ dimana periodenya T = 4 sehingga $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, maka :

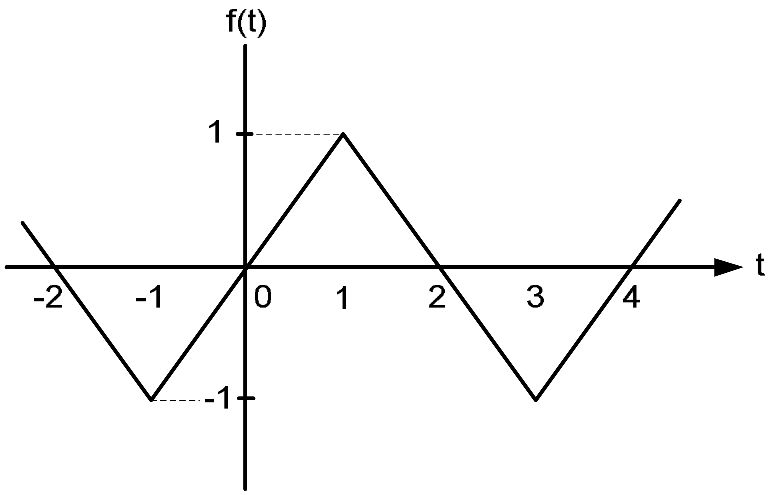
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \longrightarrow b_n = \frac{4}{4}\left[\int_0^1 1\sin n\frac{\pi}{2}t\,dt + \int_1^2 0\sin n\frac{\pi}{2}t\,dt\right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right) \longrightarrow f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$$

maka terlihat bahwa deret merupakan deret Fourir sinus.

Contoh :

Carilah deret Fourir dari fungsi di bawah ini :



Jawab :

Fungsi adalah gelombang ganjil setengah simetris, sehingga $a_0 = 0 = a_n$

dengan periode T = 4 dan $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Maka :

$$f(t) = 1 \rightarrow -1 < t < 1$$

Maka :

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \longrightarrow b_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

karena sin (-x) = - sin x pada fungsi ganjil dan cos (-x) = cos x pada fungsi genap, maka :

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^2\pi^2}(-1)^{(n-1)/2} & \text{untuk } n = \text{ganjil} = 1, 3, 5, \ldots \\ \dfrac{4}{n\pi}(-1)^{(n+2)/2} & \text{untuk } n = \text{genap} = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

sehingga :

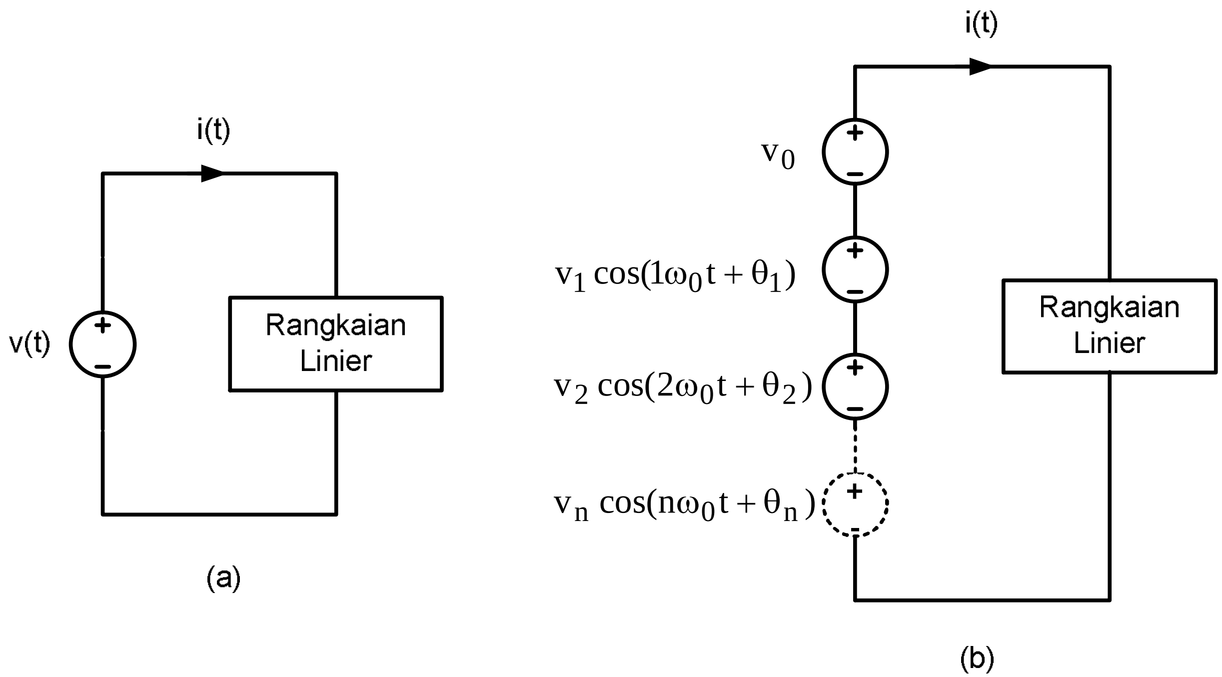
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{2} t$$

9.4 Pemakaian Pada Rangkaian Listrik

Untuk mendapatkan respons steady state rangkaian terhadap eksitasi non-sinusoidal periodik ini diperlukan pemakaian deret Fourier, analisis fasor ac dan prinsip superposisi.

Adapun langkah-langkah yang diperlukan diantaranya :

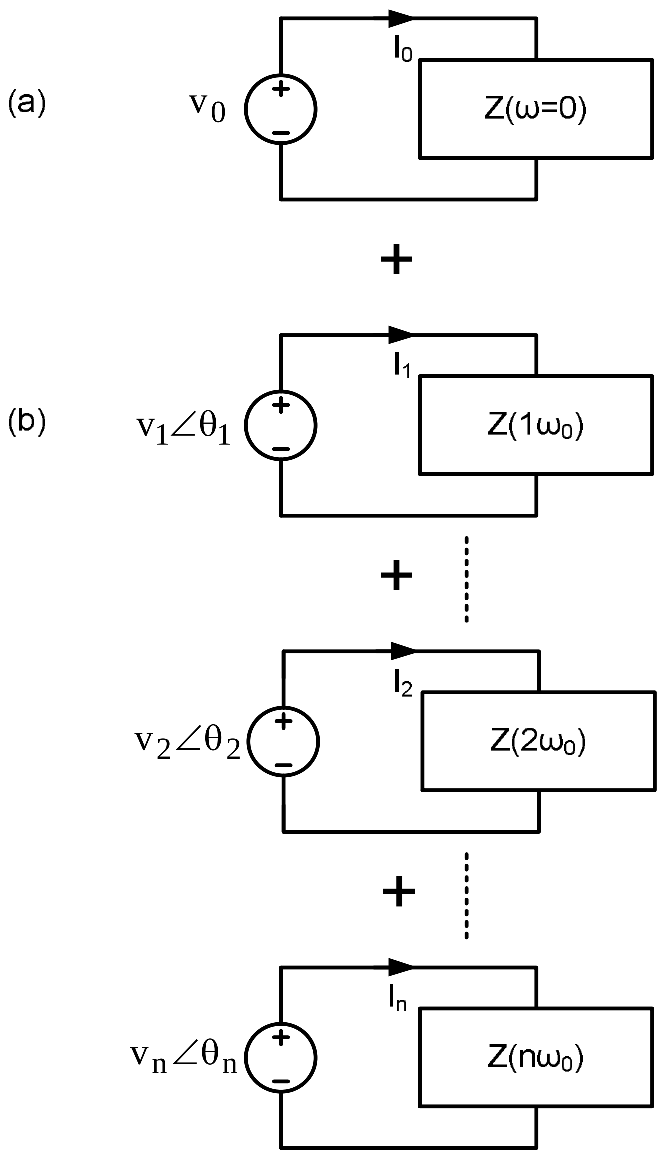
1. Nyatakan eksitasi dalam deret Fourier.
2. Transformasikan rangkaian dari bentuk wawasan waktu menjadi wawasan frekuensi.
3. Cari resonse komponen dc dan ac dalam deret Fourier.
4. Jumlahkan masing-masing response secara superposisi.



Gambar 9.6 a) Rangkaian linier dengan sumber tegangan periodik
b) Merepresentasekan deret Fourier (wawasaan waktu)

adapun pernyataan deret Fourier-nya :

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

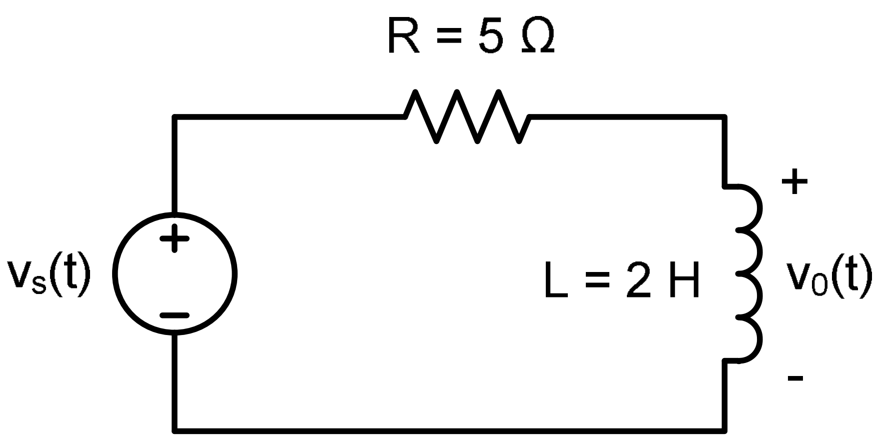


Gambar 9.7 a) Respons steady state komponen dc
b) Respons steady state komponen ac (wawasan frekuensi)

$$i(t) = i_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |In| \cos(n\omega_0 t + \Psi_n)$$

Contoh :

Rangkaian seperti di bawah ini :



Bilamana sumber tegangan $v_s(t)$ pada rangkaian berbentuk :

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi t \;\rightarrow\; n = 2k-1 \qquad (*)$$

Carilah $v_0(t)$.

Jawab :

$$V_0 = \frac{j\omega_n L}{R + j\omega_n L} V_s = \frac{j2n\pi}{5 + j2n\pi} V_s$$

$$\frac{V_0}{V_s} = \frac{j2n\pi}{5 + j2n\pi} \rightarrow \text{atau} : V_0\left(\frac{1}{V_s}\right) = \frac{1}{5 + j2n\pi}(j2n\pi)$$

$$\frac{1}{V_s} = j2n\pi \rightarrow \text{atau} : V_s = \frac{1}{j2n\pi} = \frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{j2}\right) = \frac{1}{n\pi}(-j2) = \frac{1}{n\pi}(2\angle -90^\circ)$$

$$V_s = \frac{2}{n\pi}\angle -90^\circ \longrightarrow V_0 = \frac{j2n\pi}{5 + j2n\pi}\left(\frac{2}{n\pi}\angle -90^\circ\right)$$

$$V_0 = \frac{4\angle -\tan^{-1}\left(\frac{2n\pi}{5}\right)}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2}}$$

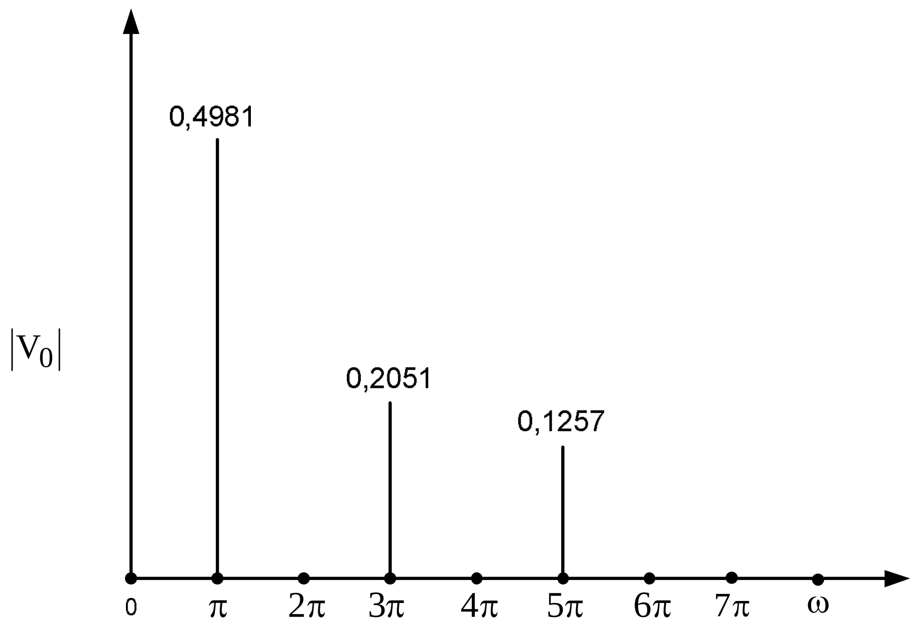
dan dalam wawasan waktu :

$$V_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2}} \cos\left(n\pi t - \tan^{-1}\frac{2n\pi}{5}\right) \rightarrow \text{untuk} : n = 2k - 1$$

maka dengan mensubstitusikan harga (k = 1, 2, 3, … atau n = 1, 3, 5,…) untuk harmonisa ganjil akan diperoleh :

$$V0(t) = 0{,}4981 \cos\,(1\pi t - 51{,}49°) + 0{,}2051 \cos\,(3\pi t - 75{,}14°) + 0{,}1257 \cos\,(5\pi t - 80{,}96°) + \ldots \text{Volt}$$

dan kalau digambarkan spektrum amplitudo-nya :



9.5 Daya Rata-rata dan RMS

Untuk mendapatkan harga daya rata-rata yang diserap oleh suatu rangkaian dengan sumber suatu fungsi periodik , yaitu :

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos(m\omega_0 t - \phi_m)$$

sedangkan sebagaimana diketahui bahwa daya rata-rata adalah :

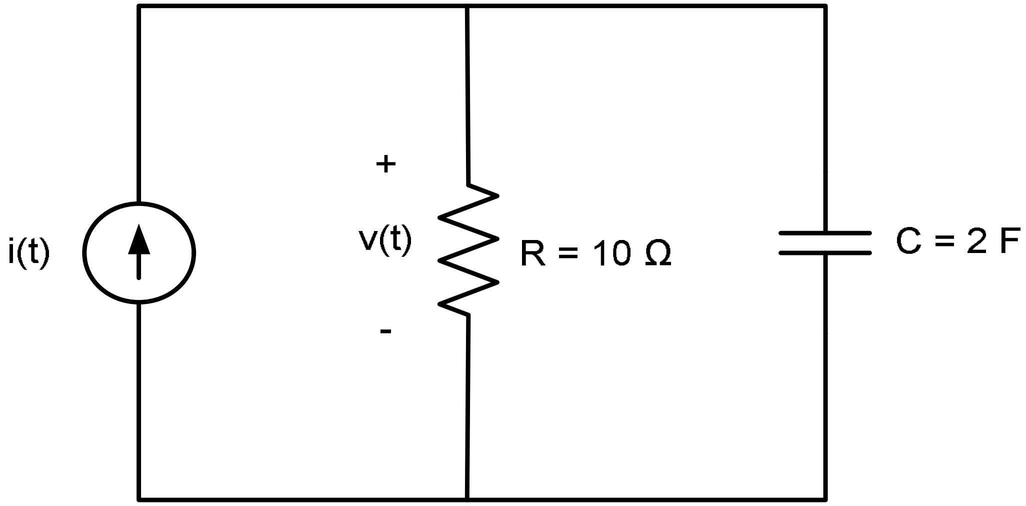
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T vi\ dt \quad \rightarrow \quad P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n)$$

harga efektif (rms) dari suatu f(t) adalah :

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\ dt} \quad \rightarrow \quad F_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}$$

Contoh :

Rangkaian seperti di bawah ini :



Carilah daya rata-rata yang diberikan oleh sumber ke rangkaian bilamana :

$$i(t) = 2 + 10\cos(t + 10°) + 6\cos(3t + 35°)\ \text{A}$$

dan cari pula V_{rms}.

Jawab :

Impedansi rangkaian :

$$Z = \frac{R.X_C}{R + X_C} = \frac{10\left(\frac{1}{j2\omega}\right)}{10 + \left(\frac{1}{j2\omega}\right)} = \frac{\left(\frac{10}{j2\omega}\right)}{\frac{j20\omega + 1}{j2\omega}} = \frac{10}{1 + j20\omega}$$

maka :

$$V = I.Z = I.\frac{10}{1 + j20\omega} = \frac{10.I}{1 + j20\omega} = \frac{10.I}{\sqrt{1^2 + (20\omega)^2}\angle \tan^{-1}\frac{20\omega}{1}} = \frac{10.I}{\sqrt{1 + 400\omega^2}\angle \tan^{-1} 20\omega}$$

untuk komponen dc (ω = 0) :

I = 2 A $\longrightarrow$ $V = \frac{10(2)}{\sqrt{1 + 400(0)^2}\angle \tan^{-1} 20(0)} = 20\,\mathrm{v}$

untuk ω = 1 rad/det, maka :

$$I = 10\angle 10° \rightarrow \text{dan } V = \frac{10(10\angle 10°)}{\sqrt{1 + 400(1)^2}\angle \tan^{-1} 20(1)} = \frac{100\angle 10°}{20\angle 87{,}14°} = 5\angle -77{,}14°$$

untuk ω = 3 rad/det, maka :

$$I = 6\angle 35° \rightarrow \text{dan } V = \frac{10(6\angle 35°)}{\sqrt{1 + 400(3)^2}\angle \tan^{-1} 20(3)} = \frac{60\angle 35°}{60\angle 89{,}04°} = 1\angle -54{,}04°$$

sehingga dalam wawasan waktu :

$$v(t) = 20 + 5\cos(t - 77{,}14°) + 1\cos(3t - 54{,}04°)\ \text{V}$$

Adapun daya rata-rata dapat dihitung dengan :

$$P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n)$$

$$P = 20(2) + \frac{1}{2}(5)(10)\cos\left[77{,}14° - (-10°)\right] + \frac{1}{2}(1)(6)\cos\left[54{,}04° - (-35°)\right]$$

$$P = 40 + 1{,}247 + 0{,}05 = 41{,}297\ \text{W}$$

cara lain :

$$P = \frac{V_{dc}^{\,2}}{R} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|V_n|^2}{R} = \frac{20^2}{10} + \frac{1}{2}\frac{5^2}{10} + \frac{1}{2}\frac{1^2}{10} = 40 + 1{,}25 + 0{,}06 = 41{,}30\ \text{W}$$

Contoh :

Suatu tegangan diekspresikan dengan :

$$v(t) = 1 - 1{,}414\cos(t + 45°) + 0{,}8944\cos(2t + 63{,}45°) - 0{,}6345\cos(3t + 71{,}56°) + \\ - 0{,}4851\cos(4t + 78{,}7°) + \ldots$$

carilah harga rms dari tegangan ini.

Jawab :

Dengan menggunakan :

$$F_{rms} = \sqrt{a_0^{\,2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\,2}}$$

maka :

$$V_{rms} = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}\left[(-1{,}414)^2 + (0{,}8944)^2 + (-0{,}6345)^2 + (-0{,}4851)^2\right]} = 1{,}649\ \text{V}$$

9.6 Bentuk Eksponensial Deret Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_o t} \quad \longrightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_o t}\, dt$$

Untuk mendapatkan harga rms

$$F_{rms} = \sqrt{a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}{2}}$$

Karena :

$$|c_n| = \sqrt{\frac{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}{2}} \qquad \text{dan} \qquad c_0^{\,2} = a_0^{\,2}$$

Maka :

$$F_{rms} = \sqrt{c_0^{\,2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}$$

Contoh :

Carilah bentuk eksponensial deret Fourier dari :

$$f(t) = e^{t} \;;\; 0 < t < 2\pi \text{ dengan : } f(t+2\pi) = f(t)$$

Jawab :

$$\text{Karena } T = 2\pi \rightarrow \text{ maka } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

maka :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jn\omega_o t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{t}\, e^{-jnt}\, dt \longrightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-jn} e^{(1-jn)t}\Big|_0^{2\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi(1-jn)}\left[e^{2\pi}e^{-j2\pi n} - 1\right] \longrightarrow e^{-j2\pi n} = \cos 2\pi n - j\sin 2\pi n = 1 - j0 = 1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi(1-jn)}\left[e^{2\pi} - 1\right] = \frac{85{,}51}{(1-jn)}$$

sehingga deret Fourier-nya : $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{85{,}51}{(1-jn)} e^{jnt}$