# Aplikasi turunan dan integral dalam persoalan ekonomi

# Fungsi Produksi

- Fungsi $q = f(K, L)$ menghubungkan input (kapital dan tenaga kerja) dengan output.
- Karena tidak dibatasi oleh spesifikasi tertentu, maka teori ini dapat diaplikasikan secara luas.
- Asumsi:
  - Fungsinya kontinu
  - Fungsinya increasing

# Analisa faktor

- Fungsi produksi $q = q(K, L)$
- Partial derivatives: Produksi marginal
  - Peningkatan output akibat penambahan capital dengan jumlah tenaga kerja tetap (PM tenaga kerja) $$q_K = \frac{\partial q}{\partial K}$$
  - Peningkatan output akibat penambahan tenaga kerja dengan jumlah kapital tetap (PM kapital)

$$q_L(K, L) = \frac{\partial q}{\partial L}$$

# Elastisitas Produksi

$$\frac{\%\Delta q}{\%\Delta x} = \frac{\Delta q / q}{\Delta x / x} = \frac{\Delta q}{\Delta x}\frac{x}{q}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{x}{q} = \frac{PM}{PR}$$

# Perubahan Total (Perubahan proporsional pada harga dan pendapatan)

- Misalkan, seorang konsumen mempunyai kemampuan membeli (purchasing power) sebesar B (budget), dengan 2 pilihan barang (x dan y) yang akan dipilihnya untuk memaksimalkan utilitasnya;

- $U = U(x,y)$ $\quad\quad$ $(U_x, U_y)>0$
- Subject to
- $xP_x + yP_y = B$

- Naik turunnya harga kedua barang tersebut ditentukan pasar.

- Berbeda dengan analisa perubahan parsial, dalam analisa total, interpretasi tidak akan menggunakan asumsi cateris paribus. Misalnya, petanyaannya adalah bagaimana perubahan konsumsi x dan y jika kedua harga barang dan budget konsumen berubah dalam proporsi yang sama.

- $jB - jxPx - jyPy = 0$
- Dalam hal ini, j dapat dihapus dari setiap bagian dengan tidak merubah hasilnya. Dengan demikian, constraint yang baru ini akan mempunyai bentuk yang sama dengan bentuk awalnya yaitu
- $B - xPx - yPy = 0$

- Dengan demikian, jumlah konsumsi x dan y akan sama dengan jumlah konsumsi pada saat ekuilibrium yang lama.  Dengan kata lain, dalam kasus ini perubahan yang proporsional pada harga barang dan pendapatan tidak akan berpengaruh pada tingkat konsumsi.

- Sehingga dapat disimpulkan bahwa konsumen sama sekali tidak terpengaruh oleh “money illusion”

# Fungsi Homogen

- $f\left(tx_1,\ldots,tx_n\right)=t^k f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ untuk semua $x_1,\ldots,x_n$ dan umumnya $t>0$

- Sebuah fungsi disebut homogen dengan tingkat (degree) *k* jika perkalian semua unsur variabel independentnya dengan konstanta *t* akan merubah nilai fungsi tersebut secara proporsional sebesar $t^k$

# Contoh dan latihan

- Misal :

$$f(x) = ax^k \qquad f(jx) = a(jx)^k$$

$$f(jx) = aj^k x^k = j^k (ax^k) = j^k (f(x))$$

- Maka dapat dikatakan bahwa $f(x)$ homogen dengan degree $k$

- Latihan:
- Apakah fungsi berikut homogen, jika ya pada degree berapa? $z = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ $\qquad y = x^3 + 3x^2$

# Contoh

- Fungsi produksi dengan 2 input produksi modal (K) dan tenaga kerja (L)

$$q = 96K^{0.3}L^{0.7}$$

$$\ln q = \ln 96 + 0.3\ln K + 0.7\ln L$$

- Produksi Marginal

$$PM_K = 96(0.3)K^{-0.7}L^{0.7}$$

$$PM_L = 96(0.7)K^{0.3}L^{-0.3}$$

# Contoh

- Elastisitas

$$E_K = \frac{96(0.3)K^{-0.7}L^{0.7}}{96K^{-0.7}L^{0.7}} = 0.3$$

$$E_L = \frac{96(0.7)K^{0.3}L^{-0.3}}{96K^{0.3}L^{-0.3}} = 0.7$$

- Return to scale $\sum k$
- Efisiensi $a$

# Fungsi komposit

$$R = P.q; P = P(Q)$$

$$q = q(K, L)$$

$$R(Q)$$

$$C = rK + wL = C(r, w, q)$$

$$\rightarrow \pi = \pi(r, w, q)$$

# Optimisasi: Maksimisasi keuntungan

- Maksimisasi keuntungan;

$$R = R(Q) \qquad \pi = \pi(Q)$$

$$C = C(Q) \qquad \frac{d\pi}{dQ} = 0$$

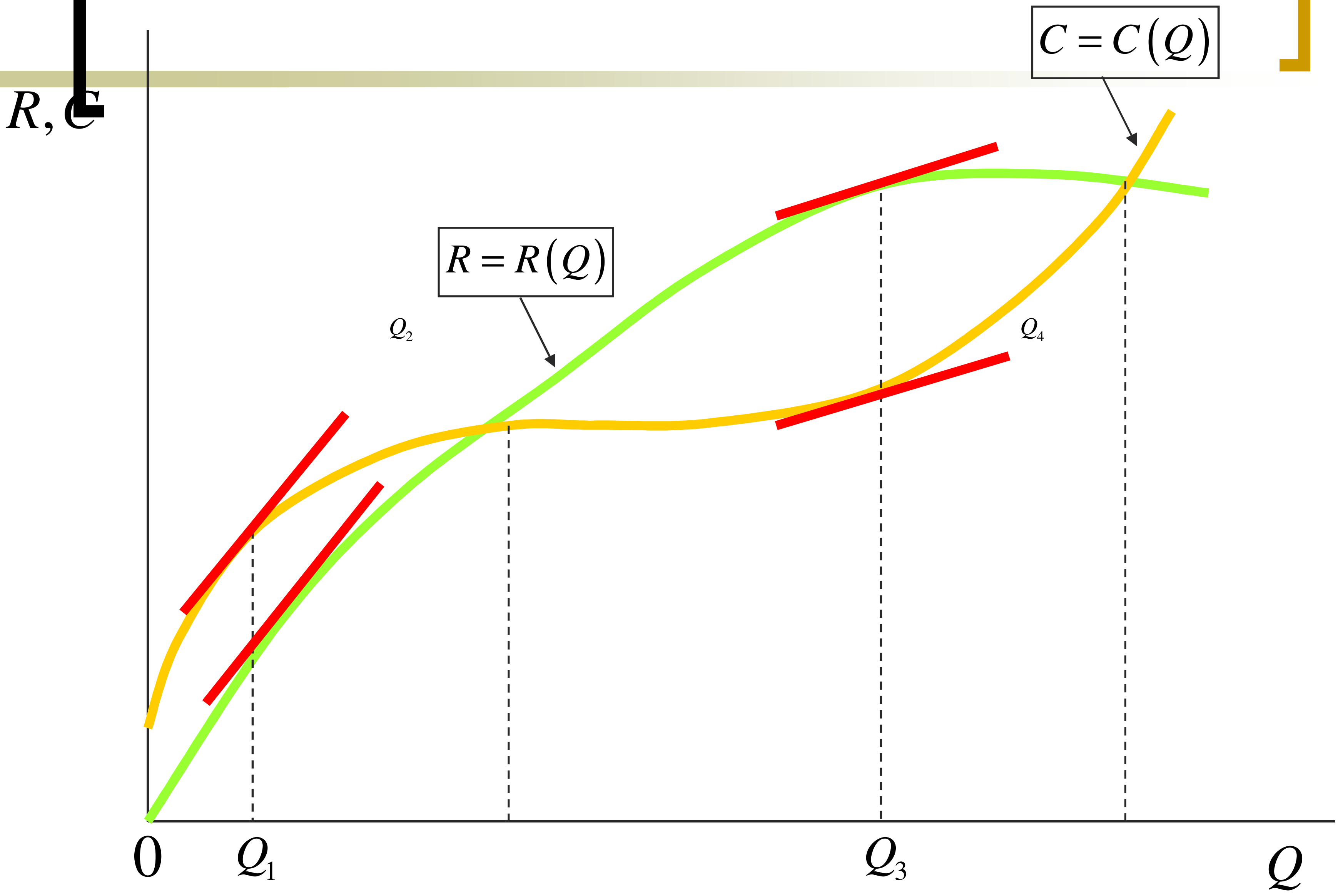
$$\rightarrow \pi = \pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$

$$\frac{d\pi}{dQ} \equiv \pi'(Q) = R'(Q) - C'(Q) = 0$$

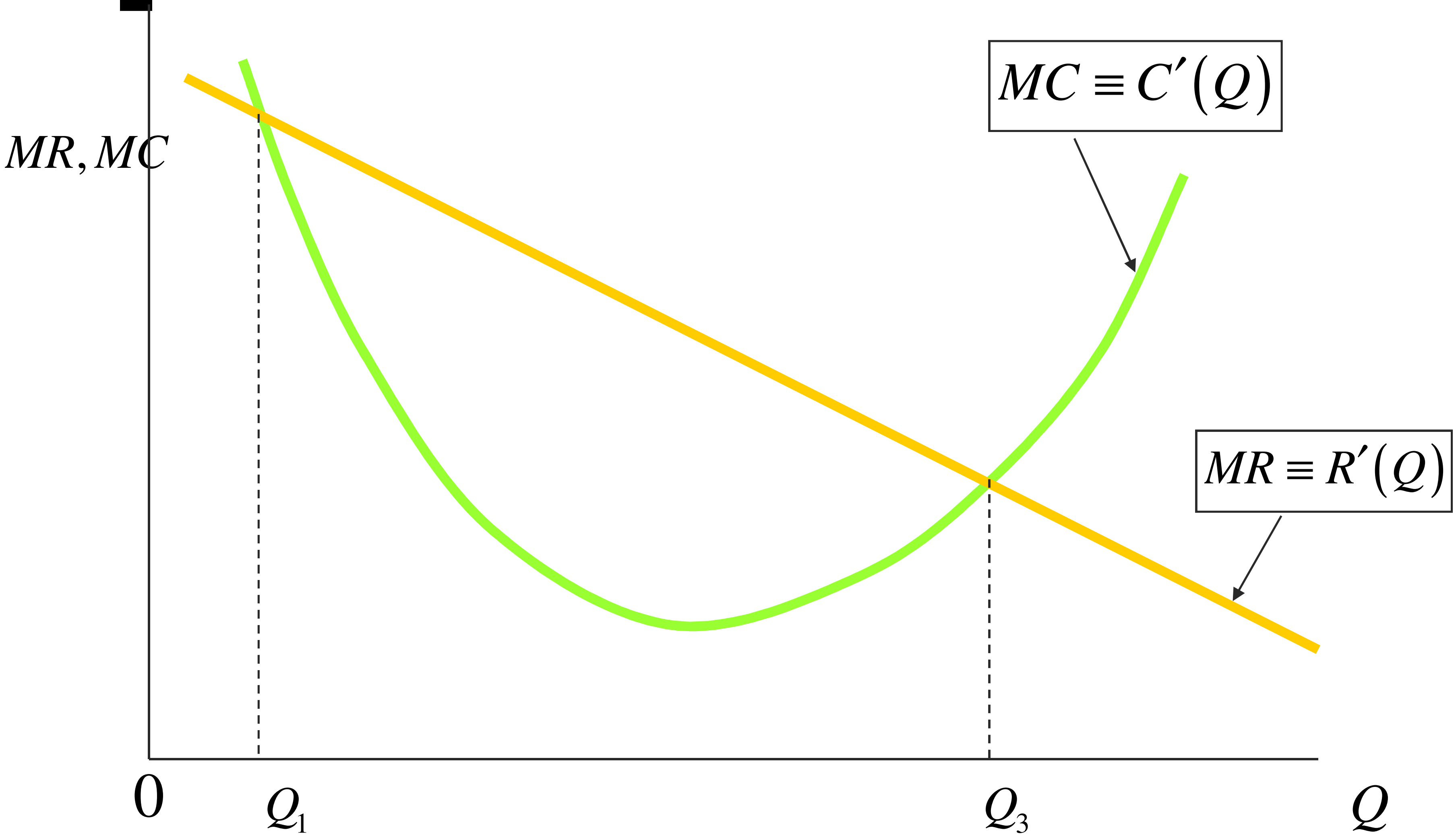
$$R'(Q) = C'(Q)$$

$$MR = MC$$

marginal revenue = marginal cost



$R, C$
$C = C(Q)$
$R = R(Q)$
$Q_2$
$Q_4$
0
$Q_1$
$Q_3$
$Q$


$MC \equiv C'(Q)$
$MR, MC$
$MR \equiv R'(Q)$
0
$Q_1$
$Q_3$
$Q$

# Contoh

$$R(Q) = 1200Q - 2Q^2$$

$$C(Q) = Q^3 - 61.25Q^2 + 1528.5Q + 2000$$

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$

$$= -Q^3 + 59.25Q^2 - 328.5Q - 2000$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 118.5Q - 328.5 = 0$$

$$Q_1 = 3 \qquad Q_2 = 36.5$$

# Solusi

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 118.5$$

$$Q = 3 \rightarrow \frac{d^2\pi}{dQ^2} > 0$$

$$Q = 36.5 \rightarrow \frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$$

# Keseimbangan Pasar

- Kesediaan membayar $\longrightarrow$ demand $f(x)$
- Kesediaan menerima harga $\longrightarrow$ supply $g(x)$
- Ekuilibrium

$\Rightarrow$ demand = supply

$$f(x) = g(x)$$

# Contoh: Keseimbangan Supply dan Demand

- Kondisi ekuilibrium:
  - $Q^S = Q^D = Q^E$ ; $P^S = P^D = P^E$
- Misal : supplier : petani
  - Jumlah yang ditawarkan $Q^F$ ; harga yang diterima $P^F$
  - Fungsi penawaran: $P^F = b + \beta Q^F$
  - Harga yang diterima petani tergantung pada jumlah yang ditawarkan (inverse supply), karena biasanya jumlah yang diproduksi tidak fleksibel, sangat tergantung pada mussim misalnya. Di samping itu, produk tidak bisa ditahan ketika harga jatuh karena bersifat perishable.
- pembeli: pedagang
  - Jumlah yang diminta $Q^R$ ; harga yang diterima $P^R$
  - Fungsi permintaan: $Q^R = a - \alpha P^R$

# Kondisi keseimbangan

- $Q^S = Q^D = Q$ atau $P^S = P^D = P$
- $P^F = b + \beta Q^F \rightarrow Q^F = (P^F - b)/\beta$
- $Q^S = Q^D$
- $a - \alpha P = (P - b)/\beta$
- $\beta(a - \alpha P) = P - b \rightarrow \beta a - \beta\alpha P = P - b$
- $Ba + b = P + \beta\alpha P \rightarrow Ba + b = (1 + \beta\alpha)P$
- $P = Ba + b / (1 + \beta\alpha)$
- $Q = a - \alpha P$ atau $Q = (P - b)/\beta$
- $Q = a - \alpha P \rightarrow Q = a - \alpha\ (Ba + b / (1 + \beta\alpha))$

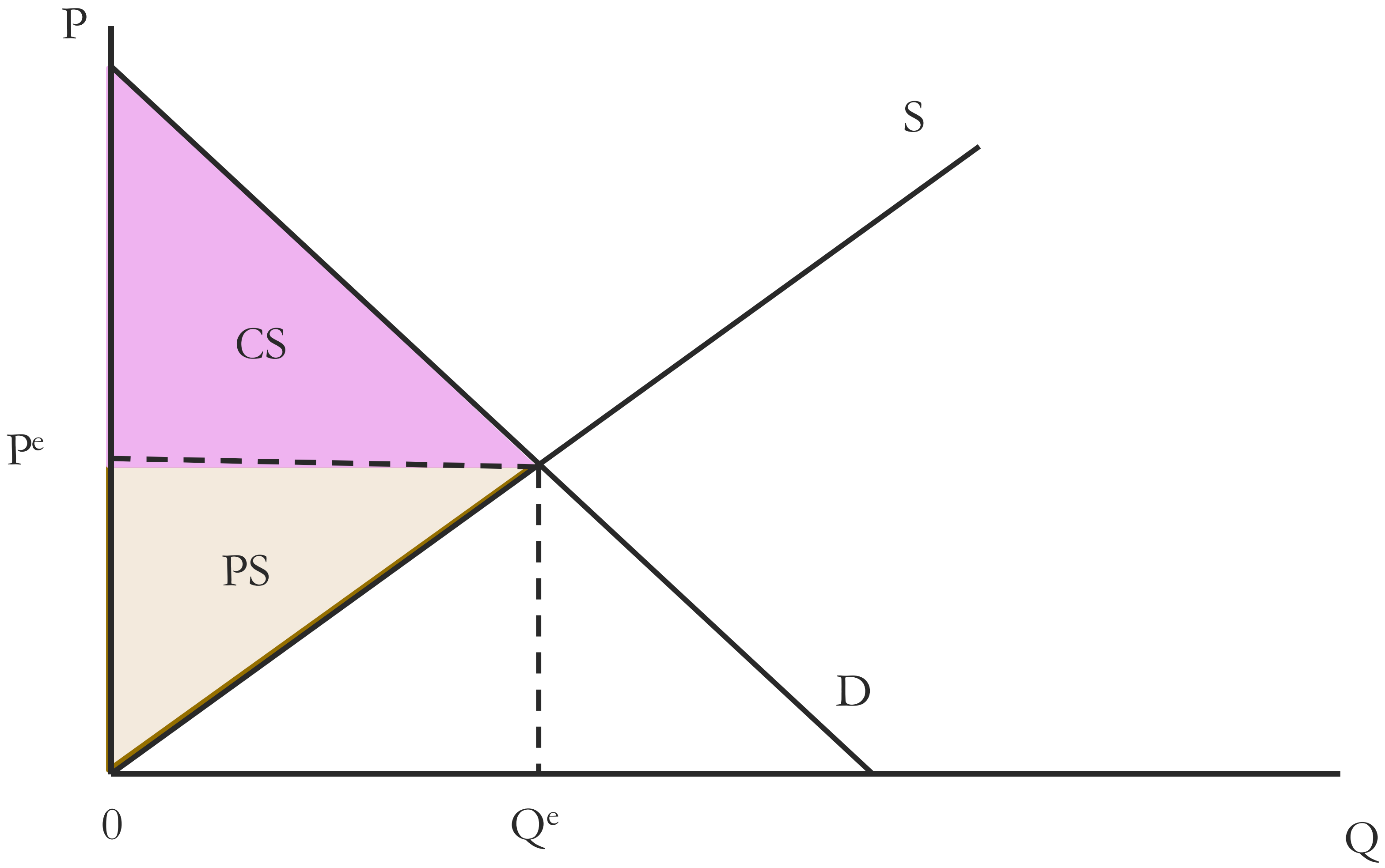
# Surplus Konsumen dan Surplus Produsen

- Surplus Konsumen adalah
  kesediaan membayar – pengeluaran sebenarnya

- Surplus Produsen adalah
  kesediaan menerima harga –penerimaan sebenarnya

- Pengeluaran/ Penerimaan sebenarnya adalah pada saat ekuilibrium

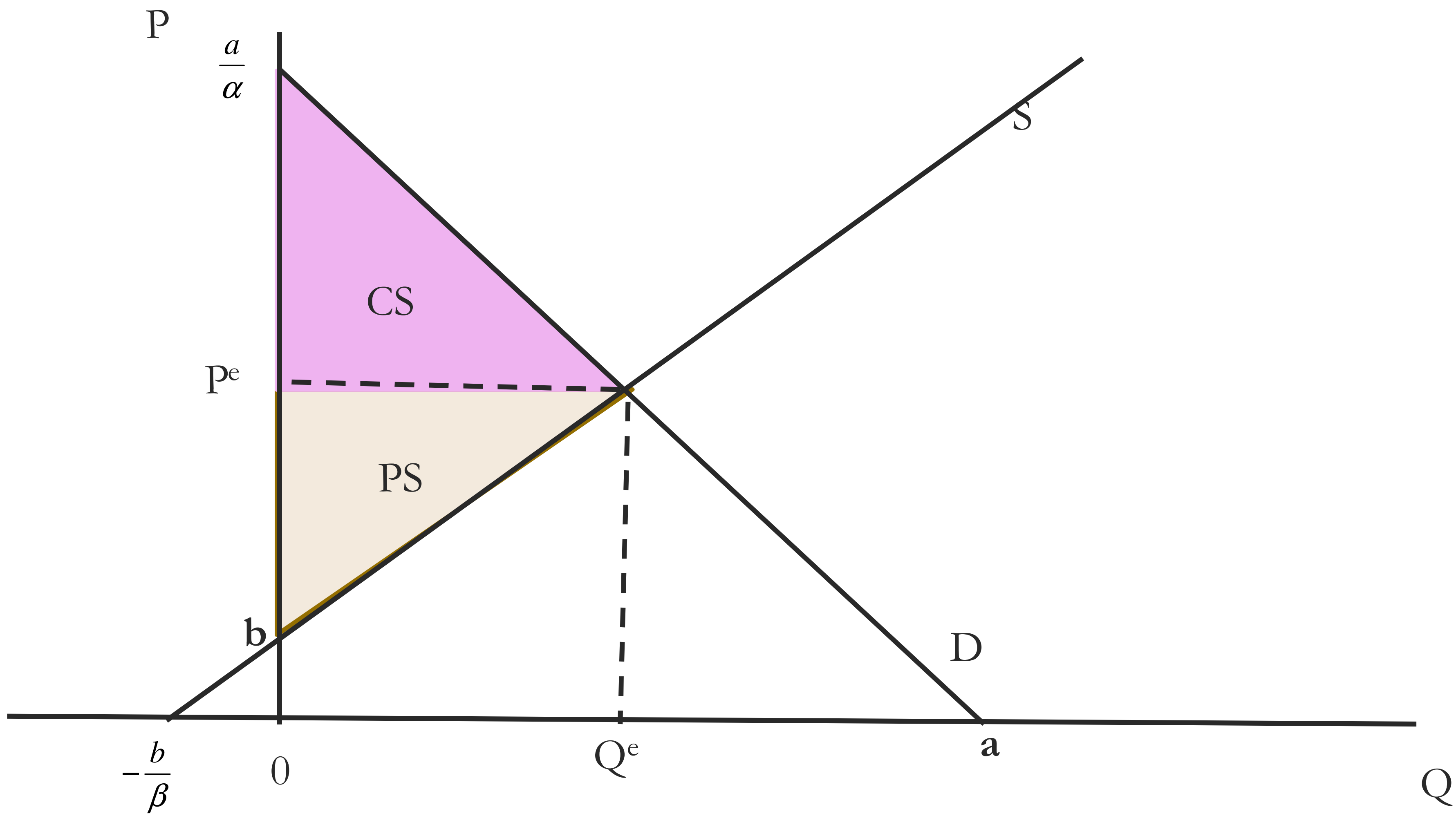
# Surplus Konsumen dan Surplus Produsen



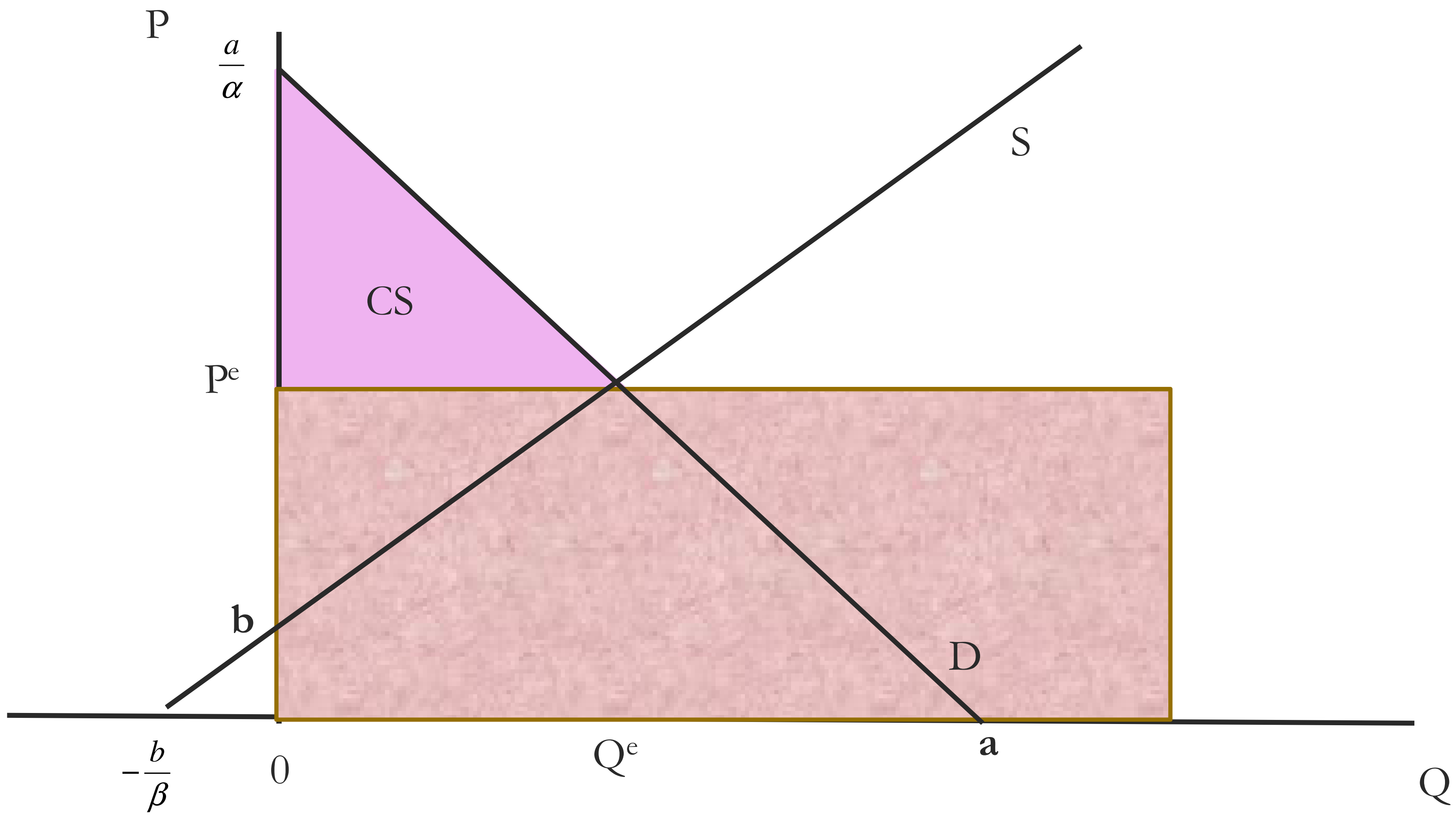
# Contoh: Surplus Konsumen

- Dari soal terdahulu diketahui jumlah dan harga keseimbangan:
- $P= Ba+b / (1+\beta\alpha)$ dan $Q= a - \alpha (Ba+b/(1+\beta\alpha))$
- Titik perpotongan kurva demand dengan sumbu harga adalah pada saat $Q^R = 0 \rightarrow Q^R = a - \alpha P^R = 0$
- $a = \alpha P^R \rightarrow P^R = a/\alpha$
- Titik perpotongan kurva demand dengan sumbu jumlah adalah pada saat $P^R = 0 \rightarrow Q^R = a$
- Titik perpotongan kurva supply dengan sumbu harga adalah pada saat $Q^R = 0 \rightarrow P^F = b$
- Titik perpotongan kurva demand dengan sumbu jumlah adalah pada saat $P^F = 0 \rightarrow P^F = b + \beta Q^F = 0$
- $b = - \beta Q^F \rightarrow Q^F = -b/\beta$

# Grafik hasil perhitungan contoh



# Cara I



# Perhitungan cara I

$$\int \left( D(Q) - P^{E} \right) dQ$$

$$\int D(Q)\, dQ - \int P^{E}\, dQ$$

$$\int D(Q)\, dQ - P^{E} \int dQ$$

# Aturan integral

- Aturan penambahan/ pengurangan

$$\int \left[ f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- Aturan eksponensial

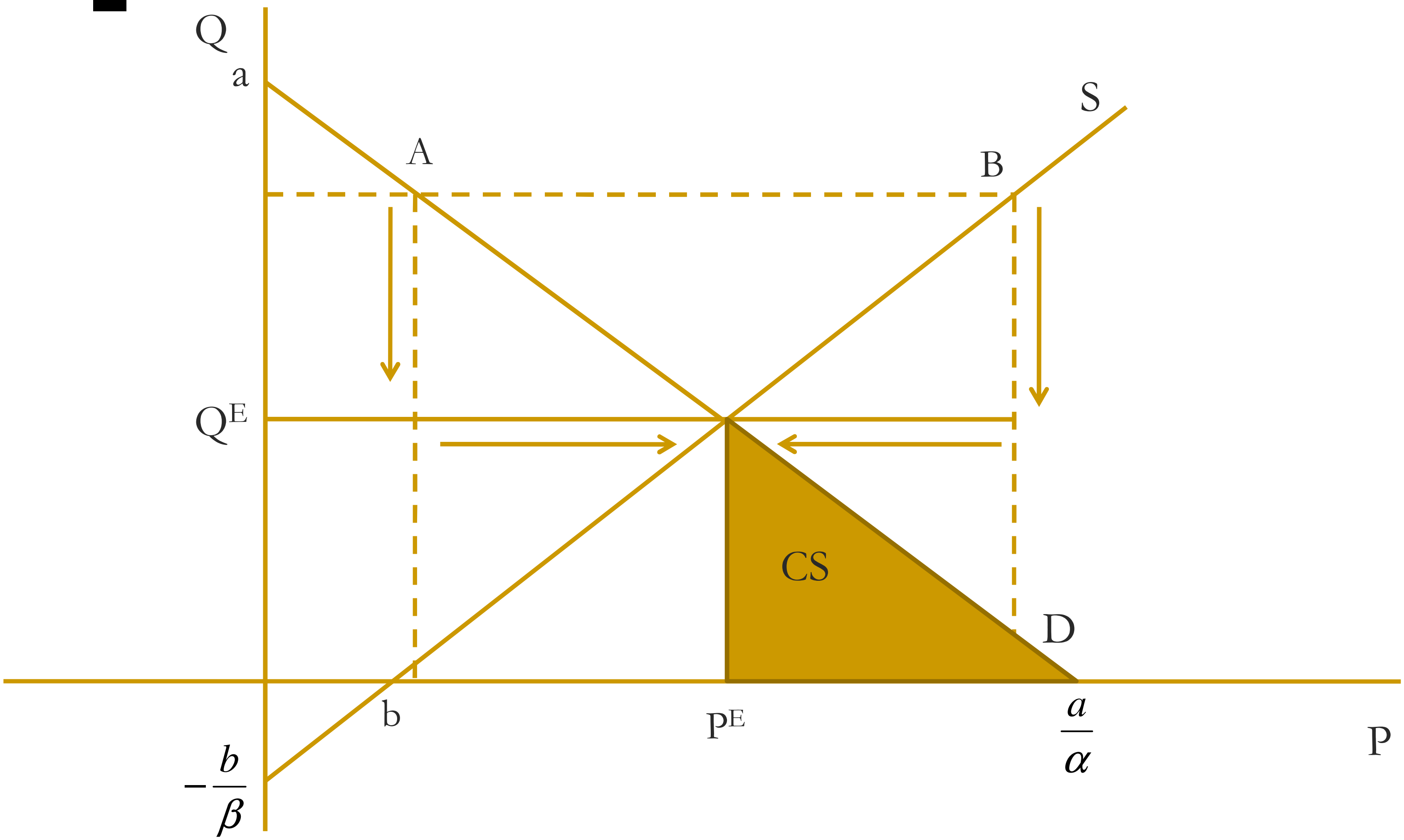
$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^{y}$$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = x \rightarrow \partial x = x\partial y$$

$$\int \partial x = \int x\partial y = \int e^{y}\partial y = x + c$$

# Cara II



# Perhitungan cara II

$$\int_{P^E}^{a/\alpha} D(P)dP = \int_{P^E}^{a/\alpha} (a - \alpha P)dP$$

$$\int_{P^E}^{a/\alpha} adP - \int_{P^E}^{a/\alpha} \alpha Pd$$

$$= aP\Big]_{P^E}^{a/\alpha} - \frac{\alpha}{2}P^2\Big]_{P^E}^{a/\alpha}$$

$$= \left[a\left(\frac{a}{\alpha}\right) - aP^E\right] - \left[\frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\left(P^E\right)^2\right]$$